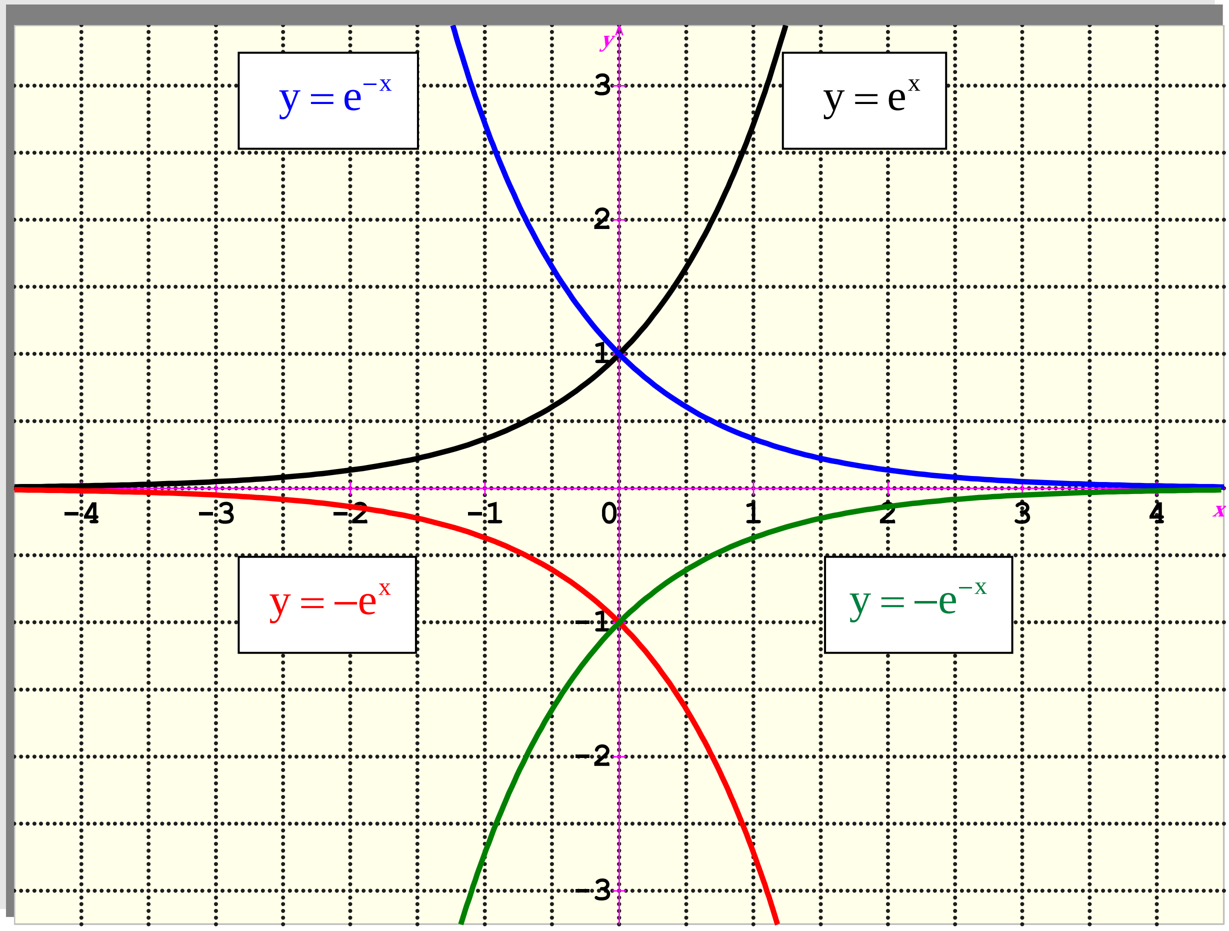
تمارين الدوال الأسيــة في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020 إعداد

الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

ملخص مختصر لدرس الدالة الأسية

1)تعريف

الدالة الأسية النيبيرية هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $\exp(x)$

نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x)=e^x$.

حالات خاصة : $\exp(0)=e^0=1$ و $\exp(1)=e^1=e$ حيث $e\simeq 2,718$.

2) خواص و نتائج :

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ومن أجل كل عدد صحيح n :

أ) خواص : 1) $e^x\times e^y=e^{x+y}$ ، 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ، 3) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ ، 4) $(e^x)^n=e^{nx}$

ب) نتائج: 1) $e^x\succ 0$ ، 2) $e^x=e^y$ تكافئ $x=y$ ، 3) $e^x\prec e^y$ تكافئ $x\prec y$

4) $y=e^x$ تكافئ $x=\ln y$ ، 5) $e^x\prec y$ تكافئ $x\prec \ln y$ ، 6) $e^{\ln x}=x$ حيث $x\in\mathbb{R}_+$

3) حل المعادلة $ae^{2x}+be^x+c=0$

حل المعادلة $ae^{2x}+be^x+c=0$ يؤول لحل الجملة $\begin{cases}X=e^x\\ aX^2+bX+c=0\end{cases}$

4)إشارة العبارة $\alpha e^{ax+b}+\beta$

1)إذا كان α و β موجبان تماما فإن: $\alpha e^{ax+b}+\beta\succ 0$.

2)إذا كان α و β سالبان تماما فإن: $\alpha e^{ax+b}+\beta\prec 0$.

3)إذا كان α و β مختلفان في الإشارة فإن العبارة $\alpha e^{ax+b}+\beta$ تنعدم عند القيمة $x_0=\frac{\ln(-\beta)-\ln\alpha-b}{a}$

وإشارة العبارة $\alpha e^{ax+b}+\beta$ تكون كمايلي:

أ) إشارة $\alpha.a$ من أجل كل $x\geq x_0$.

ب)عكس إشارة $\alpha.a$ من أجل كل $x\leq x_0$.

5)النهايات الشهيرة

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ ، 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=1$

6)الدالة المشتقة

1) من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^x)'=e^x$

2) من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^{ax+b})'=ae^{ax+b}$ حيث a و b عددان حقيقيان

3) إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال D فإن الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على المجال D حيث: $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$ (مشتقة دالة مركبة).

<u>نتيجة</u> : الدالتان u و $x \to e^{u(x)}$ لهما نفس اتجاه التغير على المجال D.

<u>7) دراسة الدالة $x \to e^{x}$</u>

* <u>دراس اتجاه التغير وتشكيل جدول التغيرات</u>

الدالة $x \to e^{x}$ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيراتها يكون كمايلي:

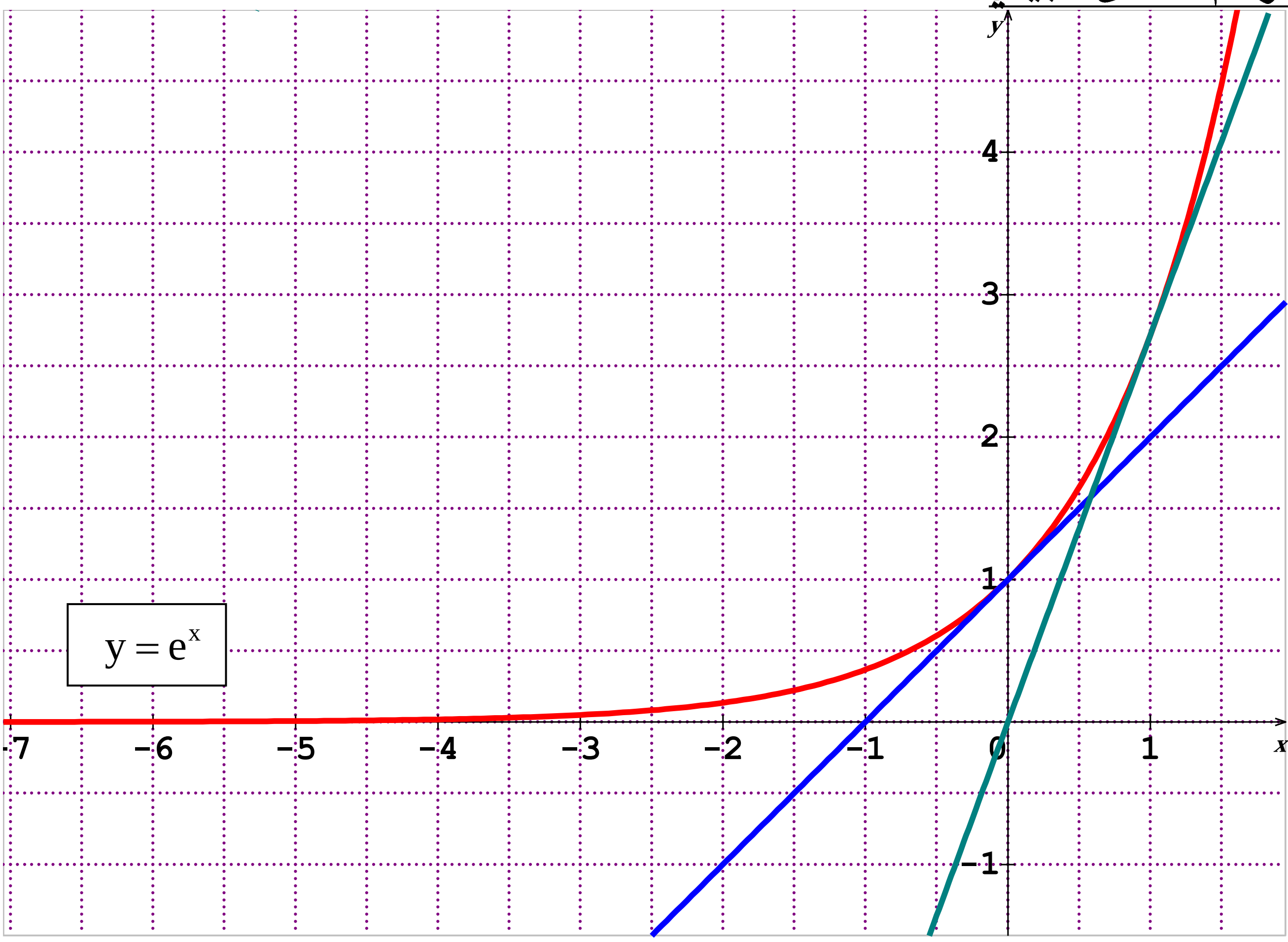
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$		
e^x	0	1	e	$+\infty$

<u>نتيجة:</u>

من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$ فإن: $0 < e^{x} < 1$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن: $e^{x} > 1$

* <u>رسم المنحنى البياني</u>



الجزء الأول: تدريبيـــات متنوعة

التمريـــــــن01

1- بسط العبارات التالية

$A=(e^2)^3\times(e^2)^{-2}-e^2$ ، $B=(e^x-1)^2-(e^x+1)^2$ ، $D=\dfrac{e^x}{x-e^x}-\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$ ، $C=(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)$

2- تحقق من صحة المساواة التالية من اجل كل x من $\mathbb{R}$

1) $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2=4$ ، 2) ، 3) $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}$ ، 4) $\dfrac{3e^x-1}{1+e^x}+1=\dfrac{4}{e^{-x}+1}$

التمريـــــــن02

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1) $e^{3+x}=e$ ، 2) $e^{-x}+1=0$ ، 3) $e^{4x^2+6}=e^{-14x}$ ، 4) $\dfrac{2e^{2x}}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^{-x}}$ ، 5) $(e^{2x}-e)(e^{-2x}+2)=0$

6) $2e^{2x}-3e^x+1=0$ ، 7) $e^{x+2}-e-2e^{-x}=0$ ، 8) $5e^x-6e^{-x}+7=0$ ، 9) $\dfrac{(x+1)(e^x-1)}{e^x-2}=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

1) $e^x\ge e$ ، 2) $e^{3x^2-3}\le e^{10x}$ ، 3) $e^{-x}+e^x\le 2$ ، 4) $e^{-x^2+x}\le 1$ ، 5) $(-2e^x+4)(e^x-1)\le 0$

6) $(x+1)(e^x-1)\le 0$ ، 7) $e^{2x}-2e^x-8>0$ ، 8) $2e^{2x}-3e^x-5\ge 0$ ، 9) $\dfrac{(x+1)(e^x+1)}{e^x-1}\ge 0$

التمريـــــــن03

نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$

1) تحقق من أن 3 هو جذرا $P(x)$، ثم استنتج : $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$ استنتج مجموعة حلول المعادلة: $P(e^x)=0$ والمتراجحة $P(e^{-2x})\ge 0$

التمريـــــــن04

نعتبر كثير الحدود التالي : $f(x)=2x^3-(1+2e)x^2+(e-1)x+e$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)-f(1)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ ثم استنتج حلول المعادلة: $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $2e^{2x}+e\times e^{-x}\ge(1+2e)e^x-(e-1)$

التمريـــــــن05

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=x+\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ والـيكن C_f تمثيلها البياني

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $f(-x)=-x-1+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}$

2) بين أن الدالة f فردية ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C_f؟
3) أحسب نهايات الدالة f عند اطراف مجال التعريف.
4) بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.
استنتج أن للمنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

التمريـــــن06

أدرس تغيرات الدوال التالية:

1) $f(x)=e^x-x+1$ ، $D_f=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=e^{2x}-e^x-1$ ، $D_f=\mathbb{R}$ ، 3) $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

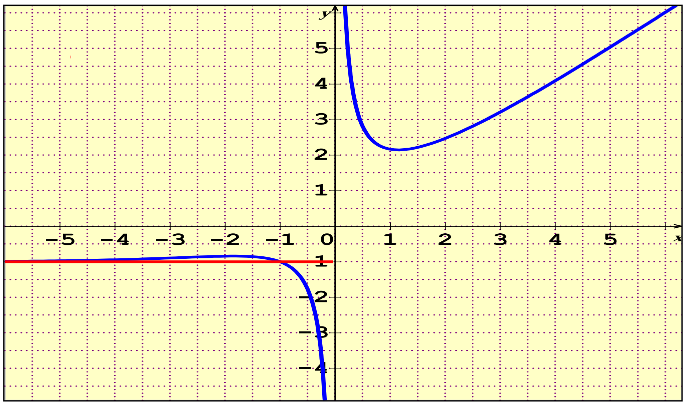
4) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$ ، 5) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$ ، 6) $f(x)=(x-1)e^{-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

7) $f(x)=(x-1)(1+2e^{-x})$ ، $D_f=\mathbb{R}$ ، 8) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ ، 9) $f(x)=x+2-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

التمريـــــن07

حدّد العبارات التالية الصحيحة والخاطئة مع التبرير
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$.
1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\times f(-x)\leq 0$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$
3) الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x=1$.
4) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

التمريـــــن08

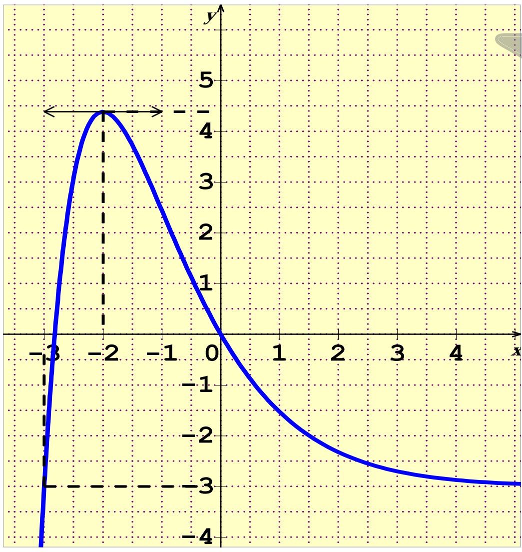


الجزء A المنحني $(\mathcal{C})$ في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $D=\mathbb{R}-\{0\}$ في المستوي المنسوب إلى متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته: $y=-1$ مقاربان لـ $(\mathcal{C})$.
1) اقرأ بيانيا نهايات f عند أطراف D.
2) حل بيانيا كل من: أ) $f(x)=-1$؛ ب) $f(x)>-1$

الجزء B: نقبل أن f معرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{xe^x+1}{e^x-1}$

1) ادرس، حسب قيم x إشارة (e^x-1)، ثم حل في $\mathbb{R}^*$ المتراجحة: $f(x)>-1$.
2) تحقق أن: $f(x)=-\dfrac{x+e^{-x}}{e^{-x}-1}$، ثم جد من جديد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا ؟

التمريـــــــن09



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(x+a)e^{-x}+b$

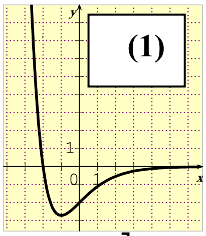
حيث a و b عددان حقيقيان وليكن C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

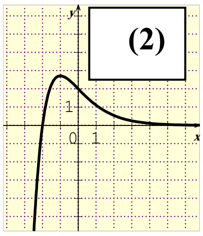
1) بقراءة بيانية للمنحنى C_f:

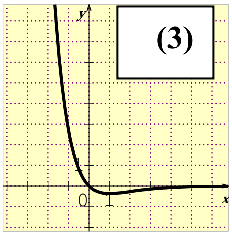
أ) عين $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f'(-2)$

ب)عين حسب قيم x إشارة $f'(x)$

2)من بين المنحنيات (1) ، (2) ، (3) عين مع التبرير المنحنى الممثل للدالة f''.







2- أ)بين أن $f(x)=(x+3)e^{-x}-3$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ)بين أن المعادلة f(x)=-2 تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1,50;1,52[$

التمريـــــــن10

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x^2+ax+b}$

حيث a ، b عددان حقيقيان وجدول تغيراتها هو التالي

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$e^{(-\frac{5}{4})}$	↗	$+\infty$

1)احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b ثم عين العددين a ، b.

2)تحقق ان معادلة المماس (T) عند $x_0=0$ هي $y=e(-3x+1)$

3) نعتبر h دالة معرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $h(x)=g(x^2+x+\frac{3}{2})$

أ) باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج عبارة $h'(x)$ على مجموعة تعريفها.

ب)استنتج اتجاه تغير الدالة h.

التمريـــــــن11

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية وليكن C_f تمثيلها البياني .

1)عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c علما أن المنحنى C_f يقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة (-1) وميله يساوي 3 عند النقطة $A(0;-3)$ و $\sqrt{3}$ حلا للمعادلة $f(x)=0$.

2) نعتبر g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=(x^2-3)e^{-x}$. وليكن C_g تمثيلها البياني

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)$

ب) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

هـ) عين نقط تقاطع C_g مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس (T) المنحنى C_g.

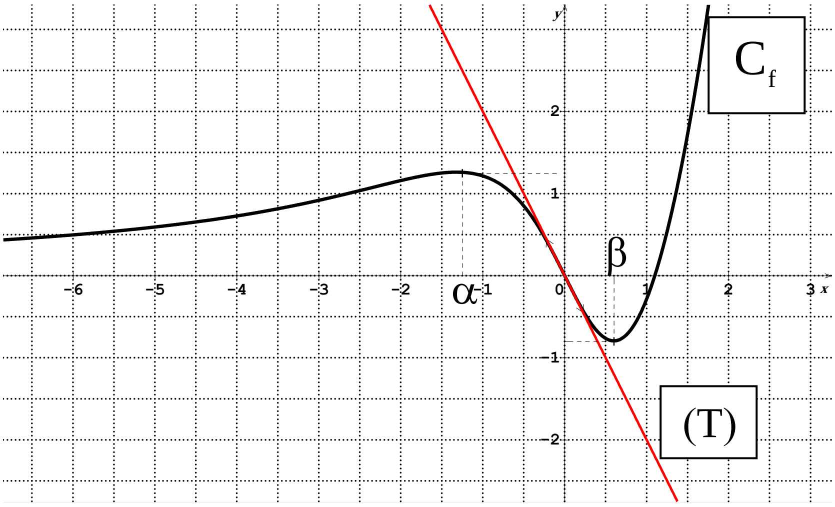
و) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 + me^x = 3$

التمريــــــن12

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - x}$

واليكن C_f تمثيلها البياني (الشكل الموالي) والمستقيم (T) هو المماس عند المبدأ.



1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - x > 0$. استنتج اشارة $f(x)$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$

4) باستعمال القراءة بيانية: أ) شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب) عين حصرا سعته $0,2$ لكل من العددين α و β القيمتين الحديتين للدالة f على $\mathbb{R}$.

جـ) عين كلا من $f'(\alpha)$ ، $f'(\beta)$ ، $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f''(0)$ ، $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(x)-f'(0)}$

5) g دالة معرفة بـ: $g(x) = \dfrac{-1}{f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني

أ) بين أن مجموعة تعريف g هي: $D =]-\infty;0[\cup]0;\ln 3[\cup]\ln 3;+\infty[$

ب) أوجد نهايات g عند اطراف مجال تعريفا ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

جـ) ادرس اتجاه تغير g ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين13: دورة 2019

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول هي 2cm
(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g والمعرفتين $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x)=e^x-ex$$

1-أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g. ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f.

3- احسب كلا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثم شكل جدول تغيرات f.

4- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5-أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (تعطى $e^2-2e\simeq 2$)

7- hدالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و(Γ)تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ)بيّن أن الدالة h زوجية.

ب)من اجل $x\in[0;2]$ احسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

التمرين14: دورة 2018

I-g الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادراس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ)بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث: $-0{,}38\prec\alpha\prec-0{,}36$ استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II-لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن (C_f) و تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) أحسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث: $(\Delta)\ :\ y=2x+1$.

2)بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون: $f'(x)=g(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4) ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 0{,}8$)

5)عيّن عدد وإشارة حلول المعادلة $x=(1-m)e^x$

التمرين15: دورة 2017

I-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2-أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$

1-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

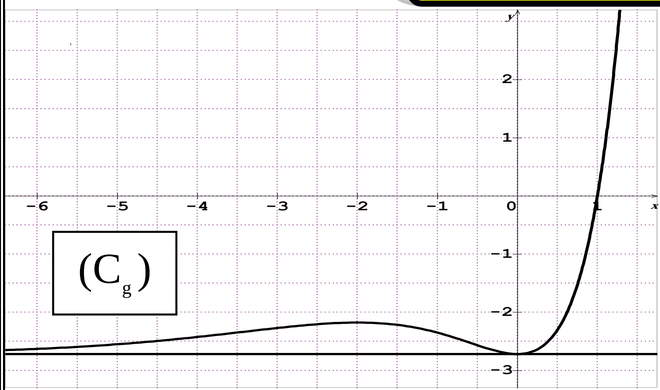
2- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7\prec\alpha\prec-0,6$.

3-إنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

التمرين16:دورة 2017 الاستدراكية

I)نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$

(C_g)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما هو في الشكل المقابل



-احسب $g(1)$

-بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II)نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب النهايات الأتية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-بيّن أن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y=e^{-x}-2$ و(C_f) متقاربان عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

3- بين أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4- استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- بيّن كيف يمكن انشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x\to e^x$ ثم ارسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

التمرين17: دورة 2016

I- g الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2-أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1{,}52\prec\alpha\prec-1{,}51$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ واليكن و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 1cm

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha)\approx0{,}38$)

د) عيّن دون حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وفسير هندسيا للنتيجة.

2-أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذوالمعادلة: $y=-x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ) بيّن أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعين احداثياهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

التمرين 18 :دورة 2016الاستدراكية

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$

I-1-أ) حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'

ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)\succ0$.

جـ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وشكل جدول تغيراتها

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1{,}38\prec\alpha\prec-1{,}37$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على من أجل كل عدد حقيقي x.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xe^x.g(x)}{(e^x-x)^2}$

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وشكل جدول تغيراتها

2-أ) بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج) ارسم المنحنى (C_f)

التمرين 19: دورة 2015

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,36\prec\alpha\prec0,37$.

3) أستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1- أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=e^{2x+2}.g(-x)$.

ب) أستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ: $f(-\alpha)\approx0,1$.

التمرين 20: دورة 2013

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ واستنتج المستقيمين المقاربين لـ (C)

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α باستعمال الجدول أعلاه ثم جد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2-أ) تحقق من أن: $g(\dfrac{\alpha+1}{2})=0$ ثم بيّن أن $g'(\dfrac{\alpha+1}{2})=2f'(\alpha)$

ب)استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ)تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

التمرين 21 :دورة 2012

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-xe^x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$..

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

3)أ-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّوحيدا $\alpha\in]-1;+\infty[$

ب-تحقق أن:$0,5\prec\alpha\prec0,6$ أستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)لتكن f' مشتقة الدالة f.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

أستنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;2]$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.(تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ-بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5)أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1,6\prec x_1\prec-1,5$ وّ $1,5\prec x_2\prec1,6$.

ب-أنشئ (Δ)و(C_f)

التمرين 22 :دورة 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$بـ:$f(x)=e^x-ex-1$

و (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.   ب-احسب$f'(x)$ ثم ادرس اشارتها.

جـ-شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2-أ-بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى(C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم(T) مماس المنحنى(C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال$]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د-أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم (C_f) في المجال $]-\infty;2]$

التمرين 23 :دورة 2010

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

يرمز (C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب)احسب $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ وَ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2)أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ').

معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4)بيّن أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5)أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2\prec\alpha\prec1$ وَ $-1,4\prec\beta\prec-1,3$.

ب)هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟.

جـ) أرسم (Δ) و (Δ').ثم المنحنى (C_f).

د)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين 24:دورة 2008

I-f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-2;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

حيث a و b عددان حقيقيان.و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

عين a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$

II- نعتبر الدالة g العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كمايلي:

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) إلى تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسر النتيجة بيانيا($\lim_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

ب)أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

جـ)بين أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعين احداثيها

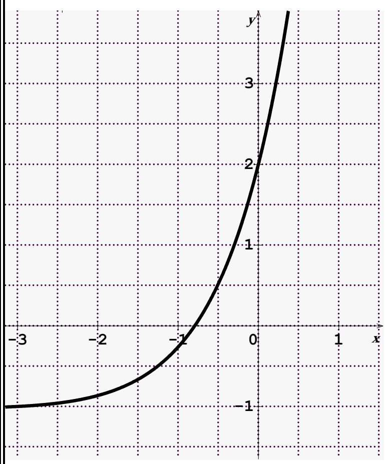
د)اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) أرسم (C_g).

و) k الدالة المعرفة المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين25: دورة 2019



I-gالدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

1- $g(x)=(x+3)e^{x}-1$ و(C_g) إلى تمثيلها البياني كماهومبيّن في الشكل

بقراءة بيانية

أ)حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

ب)أستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.

بحيث $g(\alpha)=0$، ثم تحقق أن : $-0,8<\alpha<-0,7$.

ج) أستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II-fالدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+2)(e^{x}-1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3-أ)احسب$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ثم استنتج أن (C_f)يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)يطلب تعين معادلة له

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) والموازي للمستقيم (Δ).

4-أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\simeq-0,7$)

5- h دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=|x|(e^{|x|-2}-1)+1$ و(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ)بيّن أن الدالة h زوجية.

ب) تأكد انه من اجل كل $]0;+\infty[$ فإن $h(x)=f(x-2)+1$

ج)اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3;3]$

التمرين26: دورة 2018

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2-بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$.

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3- أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر .

ب) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x)=e^{-x}+x-1$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم أستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x)\geq 0$.

4) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x)+x=\dfrac{xh(x)}{(x-1)}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .فسر النتيجة بيانيا.

5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O و النقطة $A(-2;\frac{2}{3}e^2)$ ، ثم أرسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-2;1[$.

التمرين27: دورة 2017

I-لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=1-2xe^{-x}$

- أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2-أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثم استنتج معادلة لـ: (Δ) لمقارب المائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة المستقيم (Δ) .

3-أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4-باستعمال المنحنى (C_f) ،عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حليّن مختلفين.

التمرين 28 :دورة 2015

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+2)e^x-2$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$..

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني

1)بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 -أ)بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

ب) أستنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) بيّن أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3- أ)بيّن أن المعادلة $f(x)=0$تقبل حلين α وβحيث: $0,93 \prec \alpha \prec 0,92$ وّ $-1,55 \prec \beta \prec -1,56$

ب) أرسم (Δ) و المنحنى(C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

التمرين 29 :دورة 2014

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$.

(C_f)منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$

1-عين نهاية f عند كل من$-\infty$ و $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. ثم تحقق أن: $1,28 \prec \alpha \prec 1,27$

ب)أكتب معادلة لـ(T)مماس (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 1وحدد وضعية (C_f)بالنسبة لـ(T)

جـ)أرسم (T) و (C_f).

4)عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$حلاواحدا في $\mathbb{R}$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$. و(C_h) تمثيلها البياني.

أ)بيّن أن الدالة h زوجية.   ب)أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى(C_f).

6)g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x$ حيث a وbعددان حقيقيان.

عيّن a وb حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x)$

التمرين 30 :دورة 2013

I - g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$

1)أدرس تغيرات الدالة g، شكل جدول تغيراتها.

2)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,60 \prec \alpha \prec 1,59$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II- fهي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$؛ [وحدة الطول: 2cm] .

1-بيّن أن (C_f) يقبل عند$-\infty$ و$+\infty$مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$

2- أ)برهن أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

ب)أستنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ) احسب $f(1)$ ، ثم أستنتج إشارة $f(x)$.

3-أ)بيّن أن : $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$. ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$(تدور النتائج إلى 10^{-2})

جـ) أرسم (C_f).

4-ناقش بيانيا،حسب قيم الوسيط الحقيقي m،عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x)=[f(x)]^2$

أ)أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم أستنتج إشارة $h'(x)$. ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين 31:دورة 2011

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-ادرس تغيرات الدالة f .

2- عيّن المستقيمات المقاربة لـ (C_f).

3-بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطاب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عندها.

4-لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=f(x)-x$

أ- ادرس تغيرات الدالة g.

ب-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α حيث $2,7\prec\alpha\prec2,8$.

- أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5-أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم الذي معادلته : $y=x$ و (C_f).

التمرين 32 :دورة 2010

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$

2-احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

3-بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أ) (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$

بيّن أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب)بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,91\succ x_0\succ0,9$ و $-1,65\succ x_1\succ-1,66$

جـ) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د) أرسم (D) و (D') و (C_f) .

5- m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

6- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

التمرين 33 :دورة 2009

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2}{1+e^x}$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- أحسب $f(-x)+f(x)$ و ماذا تستنتج ؟.

2-أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3-بيّن أن المستقيم $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

4-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5-بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث: $-1,7\prec\alpha\prec-1,6$

6-بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

7-بيّن أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربا ن ثم ارسم المنحنى (C_f).

شعبة :الرياضيات

التمرين 34 :دورة 2019

I- f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي .

ليكن و(C_k) تمثيلها البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)بيّن أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

2) أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k)

3-أ) احسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4-ناقش وحسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1}).

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2-أ) بيّن ان المعادلة $f(x)=1$ تقبل حليّن في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

التمرين 35 :دورة 2018

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

1) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

وأستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,9<\alpha<1$.

واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x)^2}$.

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2-بيّن أن: $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)$ (يمكن وضع $t=-\frac{1}{x}$) ثم استنتج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أن: $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4-أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1,73$)

التمرين 36: دورة 2017

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعين معادلة له

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$.

ثم أستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$. ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج اشارة $h(x)$ و حددّ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $]0;+\infty[$.

4-إرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $]0;+\infty[$.

5-نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $(E)....f(x)=m(x-2)$

ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6- g الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

إعتمادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمرين 37: دورة 2017 الإستدراكية

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

I-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ و (C) تمثيلها البياني

1- احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعين إحداثييهما، أحسب $f(-2)$ وأرسم (C_f)

II- ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$

و (C_m) تمثيلها البياني في امعلم السابق.

1-أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2- أدرس إتجاه تغير f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

3- M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1-m$

أثبت أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه.

4-أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنين (C) و (C_m)

التمرين 38 :دورة جوان2016

I φ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ و شكل جدول تغيراتها.

2)تبيان أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يختلفعن 1، ثم تحقق أن $2,79 \prec \alpha \prec 2,80$

3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1}$

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2)بيّن أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة1ثم جد معادلة له.

3)ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4-أ) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$

ب)ادرس اشارة الفرق $f(x) - g(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

التمرين 39 :دورة جوان2015

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = 0$.

استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

6-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $f(x)\succ x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ)أنشئ المنحنى (C_f).

8) m عدد حقيقي ، h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$

أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.

ب)باستعمال (C_f)، ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $h'_m(x)=0$

التمرين 40 :دورة جوان2014

I)الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1-ادرس تغيرات الدالة g.

2-بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α وβ حيث: $-1,2\prec\alpha\prec-1,1$ وّ $1,8\prec\beta\prec1,9$.

3- استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و$+\infty$ وفسر النتيجتين هندسيا.

2-بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4-احسب $f(1)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_f).

التمرين 41 :دورة جوان2013

I-الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

1-أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2-أ-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$.

تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8\prec\alpha\prec-0,7$.

ب- استنتج اشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x.

II- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$ و(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$؛[وحدة الطول: 2cm] .

1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب-بيّن أن المستقيم(Δ)ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)عند$+\infty$.

جـ-أدرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة إلى المستقيم(Δ).

2-أ-بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.

ب-شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$(نأخذ: $f(\alpha)=-0,9$)

3-أ-بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجيه كل منهما يساوي 1 .
يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب-مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f).

جـ-ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ،عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x:
$(x+1)^2+me^x=0$.

التمرين 42 :دورة جوان2012

I - g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2-xe^x$

1)أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاوحيدا α حيث $0,8\prec\alpha\prec0,9$

3) عين حسب قيم x ، اشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$؛[وحدة الطول: 2cm] .

1)بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

2)أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ب-بيّن أن المستقيم(Δ')ذا المعادلة:$y=x+1$مقارب لـ(C_f)

3) ادرس وضعية (C_f)بالنسبة إلى كل من(Δ)و (Δ')حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة$y=x$.

4)أ-بيّن أنه من أجل كل$x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب-بيّن أن $f(\alpha)=\alpha$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) أرسم(Δ)و (Δ')و(C_f).

6)ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

التمرين 43 :دورة جوان2010

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(3-x)e^x-3$

1)أدرس تغيرات الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in]2,82;2,83[$
3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$ واكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند O

2) أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$

جـ) تحقق أن: $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$، ثم عين حصرا له.

د) أنشئ جدول تغيرات f

3) أحسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\to -x^3$

4) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=0$ وفسر النتيجة هندسيا.

5) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C)

التمرين 44 :دورة جوان 2008

I) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) بين ان (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند ω.

ثم بين ان ω مركز تناظر لـ (C_f)

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$

استنتج ان (C_f) يقبل مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما

4) بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0\in]-2,77;-2,76[$.

احسب $f(1)$ و $f(-1)$ ارسم (C_f)

II) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$

2) انشئ (C_g) في نفس المعلم السابق(دون دراسة g).

الجزء الثالث:بكالوريات جزائرية و أجنبية

بكالوريات جزائرية-نظام قديم

التمرين 45:بكالوريا جوان98 ج

المستوي (π) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

أ-أدرس تغيرات الدالة f و أثبت أنّ (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

ب- بيّن أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

جـ- أحسب: $f(\ln 2)$، $f(\ln 3)$ و $f(2\ln 3)$ ثم أرسم المنحني (C_f)

2- لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $h(x)=\dfrac{2e^x}{|e^x-1|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ- أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- باستخدام المنحني (C_f) أرسم المنحني (C_h)

جـ- ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x: $(m-3)|e^x-1|=2e^x$

التمرين 46:بكالوريا سبتمبر2001

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+1+e^{2x}-e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني:

I-1-أ) أدرس تغيرات الدالة f.

ب) بين المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ).

2-أ) x_0 عدد حقيقي، نعتبر (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0.

عين x_0 حتى يكون (T) موازيا لـ (Δ). ثم اكتب عندئذ معادلة لـ (T)

ب) بيَّن أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين احداثييها.

جـ) أرسم (T) وَ (C_f) في نفس المعلم على المجال $]-\infty;1]$

د) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) الذي معادلته : $y=-x+m$

التمرين 47:بكالوريا جوان2005

الجزء I: لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+1+e^x$

1- ادرس تغيرات الدالة h.

2- أثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $-1,28 \prec \alpha \prec -1,27$

3- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $h(x)$

<u>الجزءII</u> : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$. و (C_f) تمثيلها البياني

1- أ- بين أنه مهما يكن العدد الحقيقي x: $f'(x)=\dfrac{h(x).e^x}{(e^x+1)^2}$ (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

2- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha+1$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3- أ- ليكن (T) مماس (C_f) في النقطة O. اكتب معادلة للمستقيم (T).

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y=x$، ثم ادرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

جـ-أحسب $f(-2)$، $f(-1)$ ، $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$. ثم أنشئ في نفس المعلم (Δ) و (T) و (C_f).

التمرين 48: بكالوريا جوان 2006

أ)-لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(3-2x)e^x+2$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $1,68 \prec \alpha \prec 1,69$

3-استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

2- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+4x-1}{e^x+1}$. و (C_f) تمثيلها البياني وحدة الطول 2cm

ب)- 1- بين أنه مهما يكن العدد الحقيقي x: $f'(x)=\dfrac{2.g(x)}{(e^x+1)^2}$ (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

2- بيّن أنّ: $f(\alpha)=4\alpha-5$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- ادرس تغيرات الدالة f.

4- بين المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) ذو المعادلة: $y=4x-1$

5- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ).

جـ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=2$.

د) أرسم كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f).

هـ)ناقش بيانيا،حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $me^x-4x+m+2=0$

بكالوريات أجنبية

التمرين 49:عن بكالوريا فرنسا 2019/ N-Calédonie

(ترجمة الأستاذ جبالي/بتصرّف)

I- لتكن g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x+2)e^{x-4}$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g.

2) برهن أنّ المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلاّ وحيداً α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقق أنّ $3\prec\alpha\prec3{,}1$.

3) استنتج إشارة $(g(x)-2)$، على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالّة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.

يرمز (C_f) إلى منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$: (الوحدة : $\|\vec{i}\|=1{,}5cm$ ؛ $\|\vec{j}\|=1cm$).

1) حلّ، في $\mathbb{R}$، المعادلة $f(x)=0$، ثمّ فسّر النتائج هندسيّا.

2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3) ا- برهن أنه، من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=-x.(g(x)-2)$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالّة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ا- احسب $f(-2{,}5)$، و $f(4{,}25)$، ثمّ أنشئ (C_f)؛ (يمكن أخذ $f(\alpha)\simeq5{,}7$).

ب- عيّن قيم الوسيط الحقيقي m، حتى يكون للمعادلة $f(x)=m+f(\alpha)$، ثلاثة حلول متمايزة.

التمرين 50:عن بكالوريا فرنسا 2018

(ترجمة الأستاذ جبالي/بتصرّف)

I- لتكن g الدالة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g

2) برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيداً α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقق أنّ $-0{,}7\prec\alpha\prec-0{,}6$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}$.

يرمز (C_f) إلى منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$: (الوحدة: $\|\vec{i}\|=2cm$ ؛ $\|\vec{j}\|=1cm$).

2) ا- برهن أنه، من أجل أيّ عدد حقيقي $x\succ1$، فإنّ : $1\prec x\prec x^2\prec x^3$.

ب- استنتج أنه، من أجل أيّ عدد حقيقي $x\succ1$، فإنّ : $0\prec f(x)\prec4x^3.e^{-2x+1}$.

جـ- باستخدام النهاية الشهيرة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$، برهن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$.

د- استنتج، من2) جـ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّرها هندسيّا.

3) ا- برهن أنه، من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x).e^{-2x+1}$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.، ثمّ شكّل جدول تغيّرات f.

4) احسب $f(-1,1)$، $f(-1)$، $f(0)$ ، ثمّ أنشئ (C_f)؛(تعطى $f(\alpha)\simeq 5$).

التمرين 51:عن بكالوريا تونس 2017

(ترجمة وتصرف الأستاذ:بالعبيدي م العربي)

نعتبر الدالة f والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$ واليكن (C) تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2-بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، : $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3-أ) أكتب معادلة ديكارتية لماس المنحنى(C)عند النقطة J ذات الفاصلة 0.

ب)لتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتاهما 1 و 3 على الترتيب.

بيّن أن النقطتين A و B نقطتي انعطاف للمنحنى (C).

4-في الشكل(1): (Γ) يمثل المنحنى البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالة g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{x}$.

- E و F نقطتان من المنحنى (Γ) فاصلتاهما (-1) و $(\ln10-3)$ على الترتيب و G نقطة من المستوي احداثياها $(0;1-6e^{-3})$.

أ)عبر عن $f(1)$ بدلالة $g(-1)$ و عن $f(3)$ بدلالة $g(-3)$.

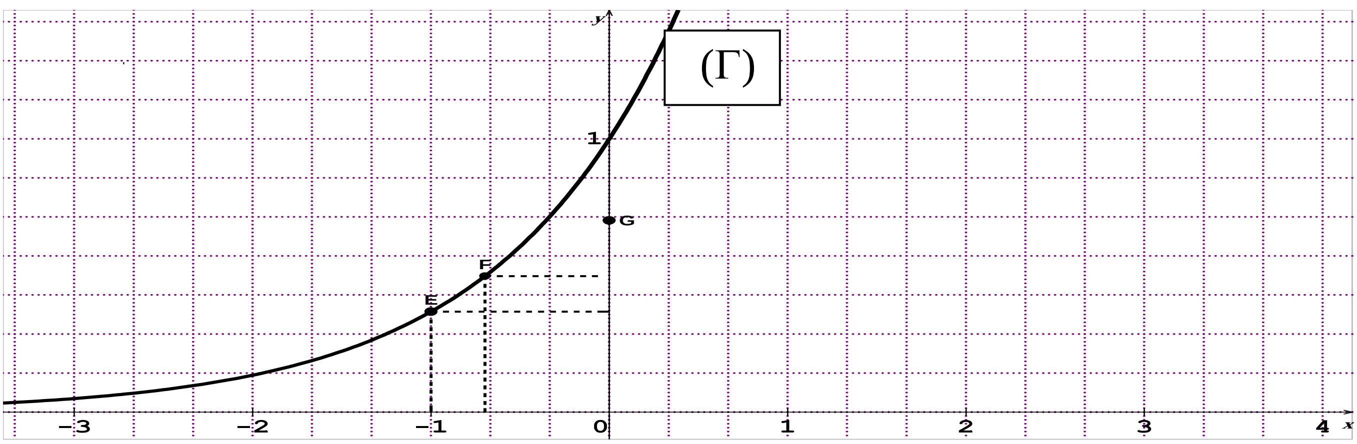
ب) أنشئ كلا من النقطتين A و B في الشكل (1) (لاحظ أن : $10g(-3)=g(\ln10-3)$)

5-أ) لتكن K نقطة من المستوي احداثياها $(\frac{11}{2};0)$

بيّن أن المستقيم (BK) يمس المنحنى (C) في النقطة B .

ب) أرسم المنحنى (C) في الشكل 1 والماسات للمنحنى (C) عند كلا من A، J و B .

.....(الشكل1)..



التمرين 52:عن بكالوريا تونس 2016

(ترجمة وتصرف الأستاذ:محمد جبالي)

1)لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2e^x$.

أ) بيّن أن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) قارن بين x و $\frac{1}{x}$ في المجال $]0;1[$ وفي المجال $]1;+\infty[$.

جـ) أستنتج أنه إذا كان $x\in]0;1[$ فإن $g(x)<g(\frac{1}{x})$ وإذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $g(x)>g(\frac{1}{x})$

2)نعتبر الدالة f والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}$

ونرمز بـ: (C_f) إلى منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوي.

أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى بيانيا.

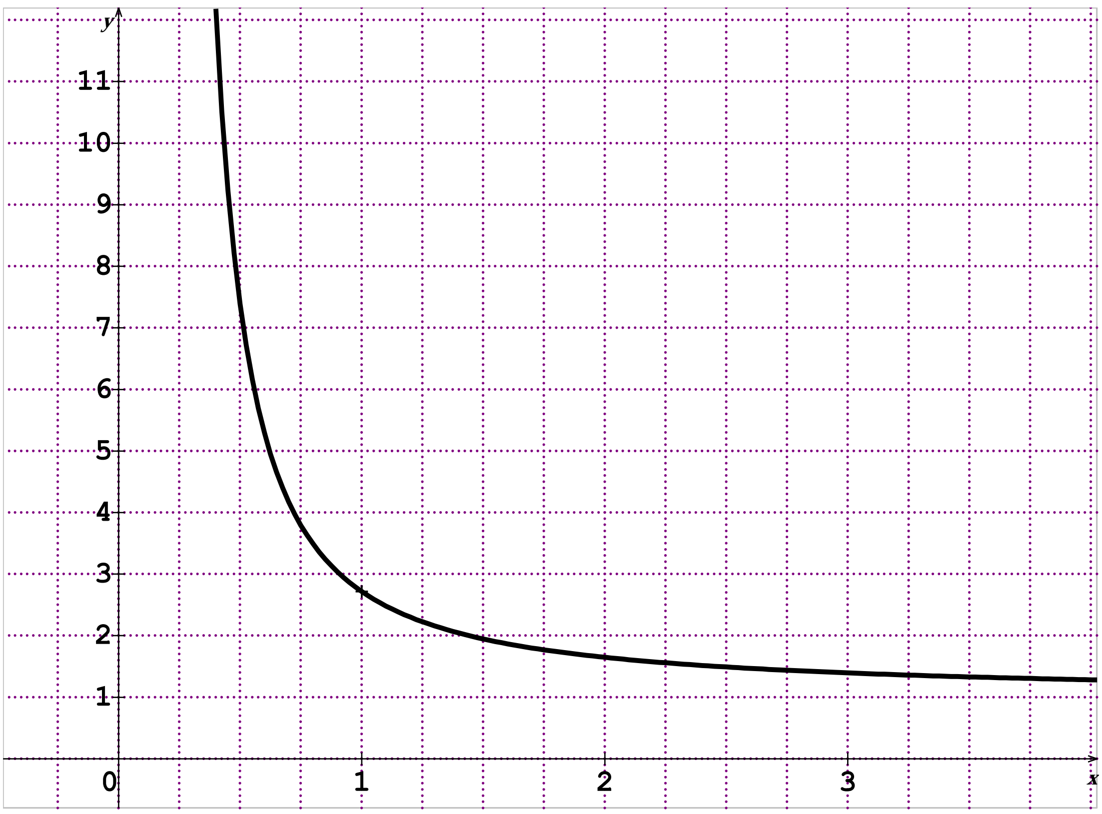
3- أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، فإن : $f'(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})$

ب)أحسب $f'(1)$: ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) في آخر التمرين ، مثلنا المنحنى (C_h) للدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$

أ) بيّن أن (C_f) فوق (C_h).

ب)إنشئ المنحنى (C_f) في نفس المعلم (تعطى $f(1,5)\simeq 7;55$).



التمرين 53:عن بكالوريا الكامرون 2016

(ترجمة وتصرف الأستاذ:محمد جبالي)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\frac{e^x-3}{e^x+1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-أ) أحسب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب)بيّن أن المستقيمين $(D_1): y=x+3$ و $(D_2): y=x-1$ مقاربان للمنحنى (C_f).

2-أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ب)أدرس إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات f.

3-أ) استنتج من جدول تغيرات f أن النقطة $I(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

ب)أعط معادلة للماس (T) للمنحنى (C_f)، عند النقطة I.

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيث $-2,8<\alpha<-2,7$.

5)أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I، ويوازي المستقيمين (D_1) و (D_2).

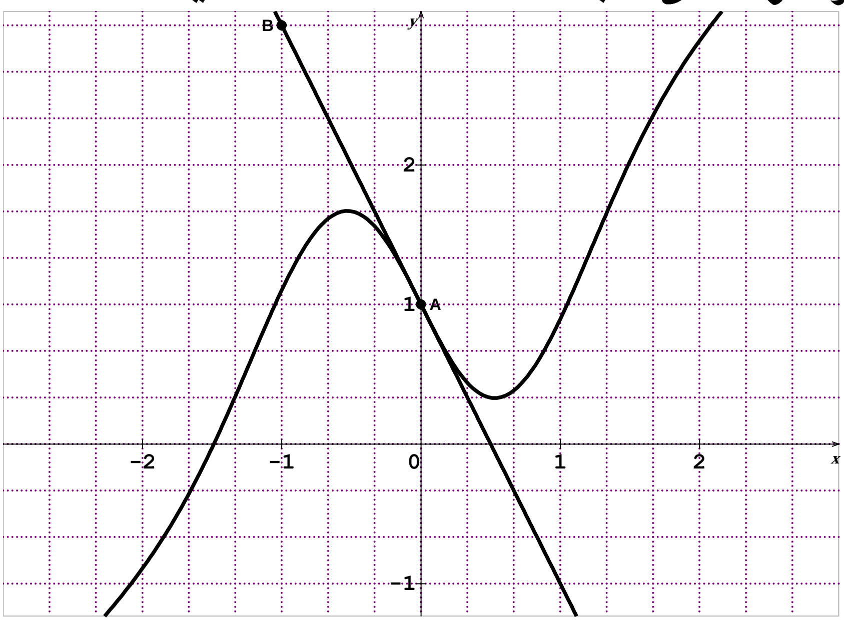
6)أنشئ المماس (T) و المستقيم (Δ)، ثم المنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$x(e^x+1)(1-m)-e^x-1=e^x-3$$

التمرين 54:عن بكالوريا فرنسا(Métropole) 2014

في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(0;1)$ و $B(-1;3)$ و المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f القابلة للإشتقاق والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+axe^{-x^2}$ حيث $a\in\mathbb{R}$



1- أ)بين أن المنحنى (C) يشمل النقطة A.

ب) عين معامل توجيه المستقيم (AB).

جـ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=1-a(2x^2-1)e^{-x^2}$

د) عين العدد a بحيث يكون المستقيم (AB) مماسا لـ (C) في A

2- من السؤال السابق ، من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)=x+1-3xe^{-x^2}$ و $f'(x)=1+3(2x^2-1)e^{-x^2}$.

أ) بين أنه من أجل كل: $x\in]-1;0]$: $f(x)\succ 0$. و $x\in]-\infty;-1]$: $f'(x)\succ 0$.

ب) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $c\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ حيث: $f(c)=0$، تحقق أن $c\prec-\frac{3}{2}+2\times10^{-2}$

التمرين 55: تونس 2014

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$. و (C_f) تمثيلها البياني.

1- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$، ثم إستنتج أن الدالة f فردية.

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3- بيّن أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ وأعطِ جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+$

- أستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}_+$: $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

4- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

5- إنشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته: $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f).

التمرين 56: المغرب 2014

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- $g(0)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\ge1$.

II نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي : $f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ (استعمل نتيجة السؤال I-2).

2- أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$.

ب) بين ان $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

3-أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$.

ب)أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4-أ) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

ب) تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{x.g(x)}{g(x)+1}$ ، ثم أدرس إشارة $x-f(x)$ على $\mathbb{R}$.

جـ)استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$.

5-إنشئ كلا من (Δ) والمنحنى (C_f).

التمرين 57: كاليدونيا الجديدة 2011

f الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+4x+3)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

الجزء الأول :نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x^2+2x-1)e^{-x}+1$.

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسر النتيجة بيانيا، ثم أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ– بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين نسمي α الحل غير المعدوم

ب):بيّن أن: $-2,4\prec\alpha\prec-2,3$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة f (نأخذ $\alpha=-2,35$)

3) بيّن أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) بيّن أن المستقيم (D) و المنحنى (C_f) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيينهما.

5) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

6) أرسم كلا من المستقيم (D) و المنحنى (C_f).

التمرين 58: فرنسا(REUNION) 2007

f الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1-أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2-أ) أثبت أن النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$.

ب) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند 0 وفسر النتيجة بيانيا.

3-أ) برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x\geq x+1$.

ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{e^x.g(x)}{(e^x-1)^2}$ حيث g دالة يطلب تعيينها.

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أ)بيّن أن المستقيم(Δ)ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

5- أرسم كلا من المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6- أ) x عدد حقيقي غير معدوم ، نعتبر النقطتين$M(x;f(x))$ و$M'(-x;f(-x))$ من المنحنى (C_f)

عين معامل توجيه المستقيم (MM').

ب) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ،ماذا تعني النتيجة السابقة ؟.

التمرين 59:فرنسا(Polynesie) 2010

I-نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x-xe^x+1$.

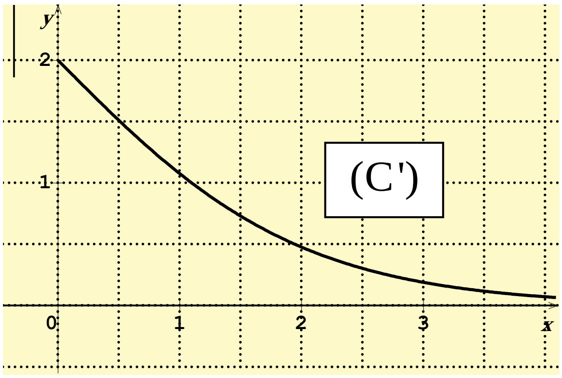
1- أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ثم أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث$1,2\prec\alpha\prec1,3$

3)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II-f الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$ وليكن (C)تمثيلها البياني في المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول على محور الفواصل 1cm و على محور االتراتيب 4cm.



1- أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha)=4(\alpha-1)$

ب) أرسم المنحنى (C) في المعلم السابق.

III- تمثل في الشكل المقابل المنحنى (C')للدالة h

والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$.من أجل كل عدد حقيقي ، نسمي M، P

و Qالنقط التيحداثياتها على الترتيب$(x;h(x))$ ، $(x;0)$و $(0;h(x))$

أ-بيّن أن مساحة المستطيل OPMQتكون أعظميةإذا كانت α فاصلة النقطة M.

ب-نفرض أن فاصلة M هي α.

أثبت أن المماس (T)في النقطة M للمنحنى (C') يوازي المستقيم (PQ).

التمرين 60: تونس 2008

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \dfrac{1}{e^x - 1}$. نسمّي (C) تمثيلها البياني

1) ا-احسب $\lim\limits_{x \to 0^<} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x)$، ثم فسّر النتيجتيْن بيانيّا

ب- أكمل دراسة تغيّرات f، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

جـ-بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]\ln 2;1[$ يحقق $f(\alpha) = 0$ ثم أثبت أنّ $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

هـ-اكتب معادلة المماس (T) لـ(C) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$

2) ا- ليكن x من $\mathbb{R}^*$ ؛ احسب $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيّا لهذه النتيجة.

ب- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+1)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$، ثم فسّر النتيجتيْن بيانيّا .

جـ-أنشئ (T) و(C) في المعلم السابق؛نأخذ $\alpha \approx 0,8$.

3) هل توجد مماسات للمنحنى (C) تعامد المستقيم ذو المعادلة y=x ؟ برر جوابك.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $(m-1) = me^x$

5) g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث: $g(x) = -x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

بين أن $g(x) = f(-x)$ ثم أرسم (C_g).

التمرين 61: فرنسا 2012

(ترجمة وتصرّف الأستاذ جبالي)

لتكن الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

نسمّي C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. [الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4cm$ ؛ $\|\vec{j}\| = 2cm$]

1) ا- احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$.

ب) ادرس إشارة $f''(x)$ ، ثم استنتج تغيّرات f' على $\mathbb{R}$.

جـ)بيّن أنّ المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0,5;0,6[$؛ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

د) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات f (تعطى $f(\alpha) \approx 0.2$).

2) ا- أثبت أنّ المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحني C_f بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى مستقيم (D).

جـ- بيّن أنه يوجد مماس (Δ) للمنحنى C_f يوازي المستقيم (D)، يطلب كتابة معادلة له.

د- أنشئ كلا من (Δ) و (D)، ثم المنحني C_f على المجال $]-\infty;1,5]$ (تعطى $f(1,5) \approx 3,36$).

هـ-ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m،عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m + 2 - e)e^{-x} = x$.

الحـــــلول

الجزء الثاني

العلوم التجريبية

****

الجزء الثالث

تقني رياضي

****

الجزء الرابع

رياضيات

****

BAC2020

الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

الجزء الثاني:تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين13: دورة 2019

1-أ) دراسة اتجاه تغير g

لدينا : دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{x}-ex$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{x}-e$

$g'(x)=e^{x}-e=0$ معناه $x=1$ ، $g'(x)<0$ معناه $x<1$ ، $g'(x)>0$ معناه $x>1$

ومنه g متناقصةعلى المجال $]-\infty;1[$ و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $g(1)=0$

ب)استناج اشارة $g(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x

من الجواب السابق نستنتج ان g تقبل قيمة حدّية صغرى هي الصفر عند1

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$.

2)دراسة اتجاه تغير f

لدينا : دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{x}-ex=g(x)$

من الجواب السابق 1-ب) نستنتج أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن: $g(x)\geq 0$

3)حساب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ وتشكيل جدول تغيراتها

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}=-\infty$ * ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}=+\infty-\infty$

رفع ح ع ت: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}(\frac{e^{x}}{x^{2}}-\frac{1}{2}e)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

4) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (C_g)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f)بالنسبة لـ (C_g) ندرس اشارة الفرق $(f(x)-g(x))$

لدينا: $(f(x)-g(x))=-\frac{1}{2}ex^{2}+ex=\frac{1}{2}xe(-x+2)$

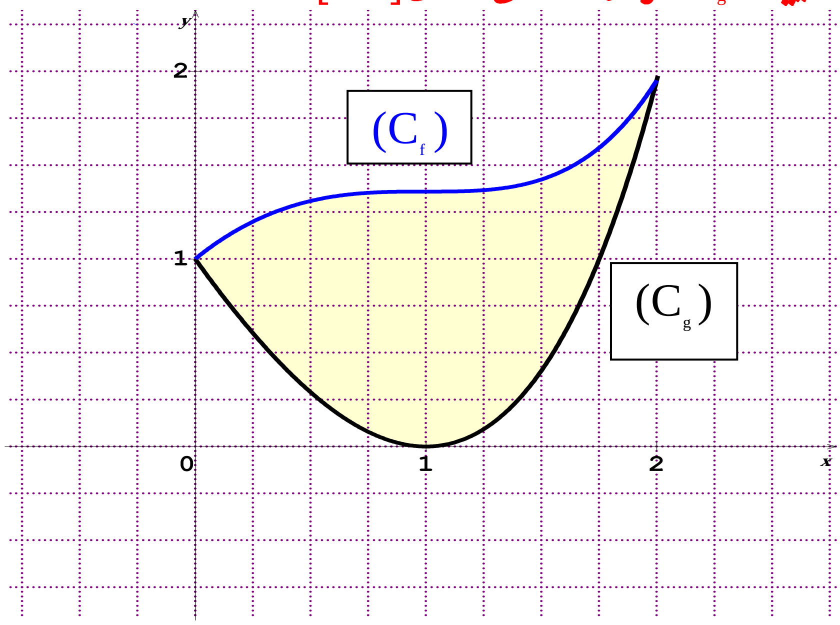
وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة$x(-x+2)$

ومنه : من أجل كل $x\in]0;2[$ يكون $x(-x+2)>0$ ومعناه (C_f)فوق(C_g)

من أجل كل $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ يكون $x(x+1)<0$ ومعناه (C_f) تحت (C_g)

ومن أجل $x\in\{0;2\}$ يكون $x(-x+2)=0$ ومعناه (C_f) يقطع (C_g)

5)رسم كلا من المنحنيين (C_g) و (C_f) على المجال $[0;2]$



7 - أ) اثبات ان الدالة h زوجية

لدينا: h دالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و (Γ) منحناها البياني

h دالة زوجية معناها من أجل كل $x\in[-2;2]$ ومن أجل $-x\in[-2;2]$: $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$ ومنه h دالة زوجية

ب) حساب $h(x)+f(x)$ من أجل كل $x\in[0;2]$

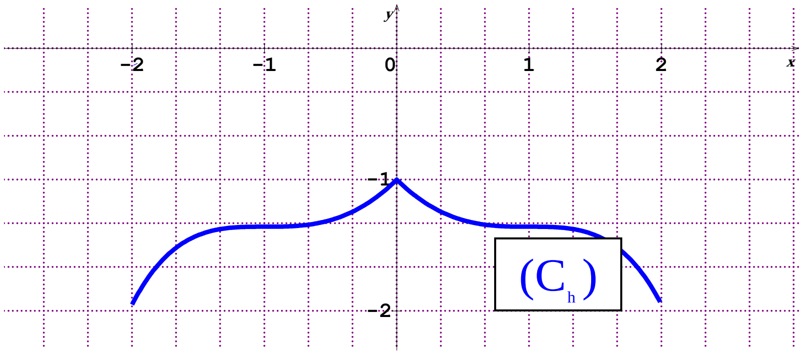
من أجل كل $x\in[0;2]$ لدينا: $h(x)+f(x)=-e^x+\frac{1}{2}ex^2+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$

استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثم رسم (Γ)

لدينا $h(x)+f(x)=0$ ومعناه $h(x)=-f(x)$ معناه $h(x)=\begin{cases}-f(x) & ;x\in[0;2]\\ -f(-x) & ;x\in[-2;0]\end{cases}$

ومعناه (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل من أجل $x\in[0;2]$

ثم نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب من أجل $x\in[-2;0]$ لأن h دالة زوجية



التمرين14: دورة 2018

I- أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

g الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x)e^{-x}=\lim_{t\to+\infty}(-t)e^{t}=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2+\lim_{x\to-\infty}(-t)e^{t}=2$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=1.e^{-x}-(x-1)e^{-x}=(2-x)e^{-x}$

إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $(2-x)$ لأن $e^{-x}>0$

الدالة g متناقصة تماما على $]2;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;2[$ و $g(2)=2+e^{-2}$

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$g(2)$	↘	2

ج)تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاوحيد α حيث: $-0{,}38\prec\alpha\prec-0{,}36$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;2[$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $g(2)=2+e^{-2}$

لدينا: $g(-0{,}36).g(-0{,}38)\prec 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $-0{,}38\prec\alpha\prec-0{,}36$.

استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من الجوابين ب) وجـ) نستنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ تكون كمايلي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ فإن $g(x)<0$ لأن $g(]-\infty;\alpha[)<0$

من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)>0$ لأن $g(]\alpha;+\infty[)>0$

II- أ) حساب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\frac{x}{e^{x}}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

ب) حساب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$ تعني ان المستقيم ذو المعادلة: $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$

جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث: $y=2x+1$: (Δ).

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-xe^{-x}$

لدينا: $f(x)-y>0$ من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ لأن $-xe^{-x}>0$ ويكون (C_f) تحت (Δ)

$f(x)-y<0$: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $-xe^{-x}<0$ ويكون (C_f) فوق (Δ)

$f(x)=y$ من أجل كل $x=0$ لأن $-xe^{-x}=0$ ويكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$

2) تبيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون: $f'(x)=g(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-1.e^{-x}+xe^{-x}=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=g(x)$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ والموضحة في II –جـ

وعليه الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha[$

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

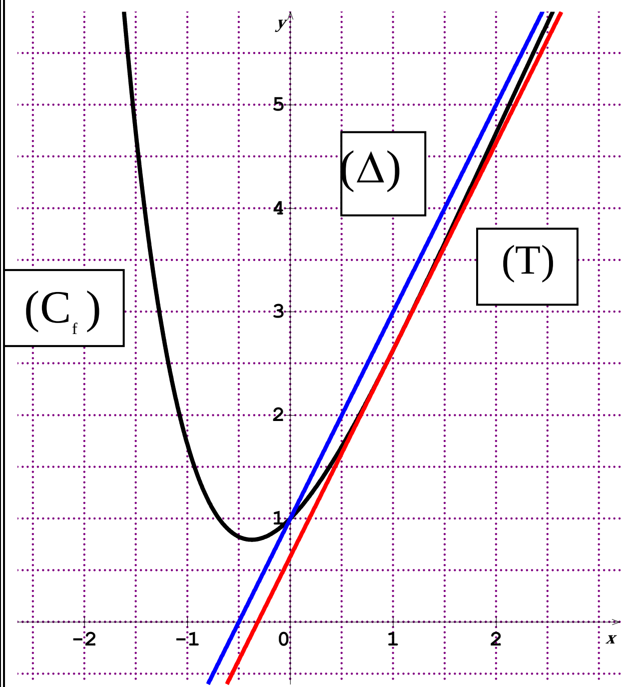
3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا: (T) له معادلة من الشكل : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $a=1$

ومنه : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي:

$y=2x-2+3-e^{-1}$ ومنه $y=2x+1-e^{-1}$

4) رسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) .



5) تعيين عدد وإشارة حلول المعادلة $x=(1-m)e^x$

لدينا: $x=(1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ وتكافئ

$2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي $f(x)=2x+m$

لمعادلة $f(x)=2x+m$ هندسيا تكافئ الجملة

التالية: $\begin{cases} y=2x+m....(1)\\ y=f(x)......(2)\end{cases}$

حلول الجملة السابقة هندسيا هي فواصل نقط

تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=2x+m$ والمنحنى (C_f). من البيان نجد :

1) $m<1-\dfrac{1}{e}$ المعادلة لا تقبل حلول ، 2) $m=1-\dfrac{1}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

3) $1-\dfrac{1}{e}<m<1$ المعادلة تقبل حلّين موجبين، 4) $m=1$ المعادلة تقبل وحيدا معدوم

5) $m>1$ المعادلة تقبل وحيدا سالبا.

التمرين15: دورة 2017

I) تبيان ان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ وإعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة و حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2-\lim_{x\to+\infty}x^2e^{1-x}=2-\lim_{t\to-\infty}t^2e^{t}.e=2-0=2$* حيث $t=-x$

نستنتج أن: المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته $y=2$

$\lim_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2-\lim_{x\to-\infty}x^2e^{1-x}=-\infty$* لأن $\lim_{x\to-\infty}x^2e^{1-x}=+\infty$

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-\left[2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}\right]=x(x-2)e^{1-x}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x(x-2)$.

لأن e^{1-x} موجبة تماما على $\mathbb{R}$ وعليه اشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		+	0	−	0	+	

وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كمايلي

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$f(2)$	↗	2

3) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(T) له معادلة من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي: $y=-x+2$

II-1) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$

h معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$ ومنه $h'(x)=-(1.e^{1-x}-xe^{1-x})=(x-1)e^{1-x}$

$h'(x)=0$ إذاكان $x=1$ ولدينا: $h'(x)\prec 0$ إذاكان $x\prec 1$ و $h'(x)\succ 0$ إذاكان $x\succ 1$

و لدينا $h(1)=0$ أي أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $h(x)\geq 0$

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) ندرس اشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$

لدينا: $f(x)-(-x+2)=x(1-xe^{1-x})=x.h(x)$

وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة x لأن $h(x)\geq 0$ ونلخص الوضع في الجدول التالي:

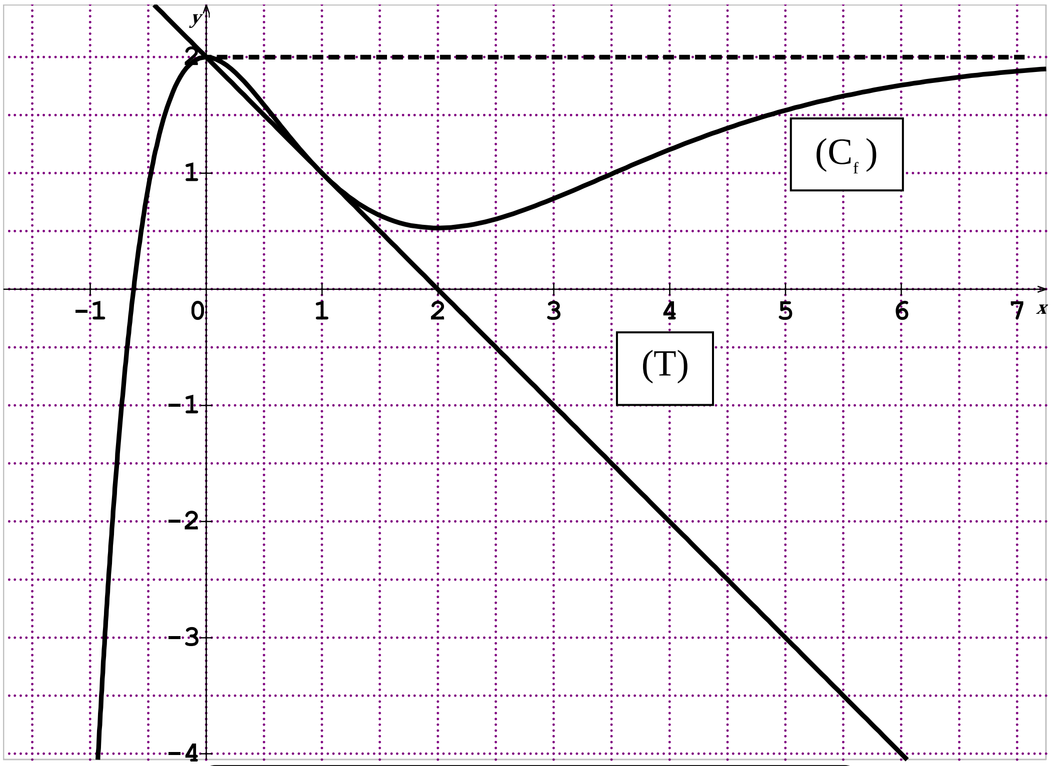
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		−	0	+	0	+	
الوضع		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 \prec \alpha \prec -0,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;0[$ و $f(0)=2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لدينا: $f(-0,7)=-0,68 \prec 0$ و $f(-0,7)=0,21 \succ 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=0$ حيث $-0,7 \prec \alpha \prec -0,6$.

6) إنشاء المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.



التمرين16:دورة 2017 الاستدراكية

I- حساب $g(1)$

لدينا: الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$ ومنه $g(1)=1^2e^1-e=0$

- تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x بقراءة بيانية

بقراءة بيانية إشارة $g(x)$ تكون كمايلي:

من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ فإن $g(x)\prec 0$ لأن (C_g) تحت حامل محور الفواصل

من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ فإن $g(x)\succ 0$ لأن (C_g) فوق حامل محور الفواصل

استنتاج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

$g(1)=1^2e^1-e=0$ ومنه $g(-1)=(-1)^2e^1-e=0$

$x\in]-\infty;-1[$ فإن $g(-x)\succ 0$ و $x\in]1;+\infty[$ فإن $g(-x)\prec 0$

1-II) حساب النهايات الأتية: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{-x}-2-\frac{e}{x})=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}(e^{-x})=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(-\frac{e}{x})=0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} (-\frac{e}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-\frac{e}{x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = -2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{e}{x}) = 0$

2-تبيّان أن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$.

المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ معناه $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (e^{-x} - 2) \right] = 0$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (e^{-x} - 2) \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{e}{x}) = 0$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -\frac{e}{x}$

من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ فإن $-\frac{e}{x} \succ 0$ وعليه يكون (C_f) فوق (γ)

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن $-\frac{e}{x} \prec 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

من اجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-[(-x)^2 e^{(-x)} - e]}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$

4) استنتاج ان f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty;-1]$

من العبارة $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(-x)$ وعليه:

1) $x \in]-\infty,-1]$ معناه $f'(x) \le 0$ ومنه الدالة f تكون متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$

2) $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$ معناه $f'(x) \ge 0$ ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2(e-1)$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	-2

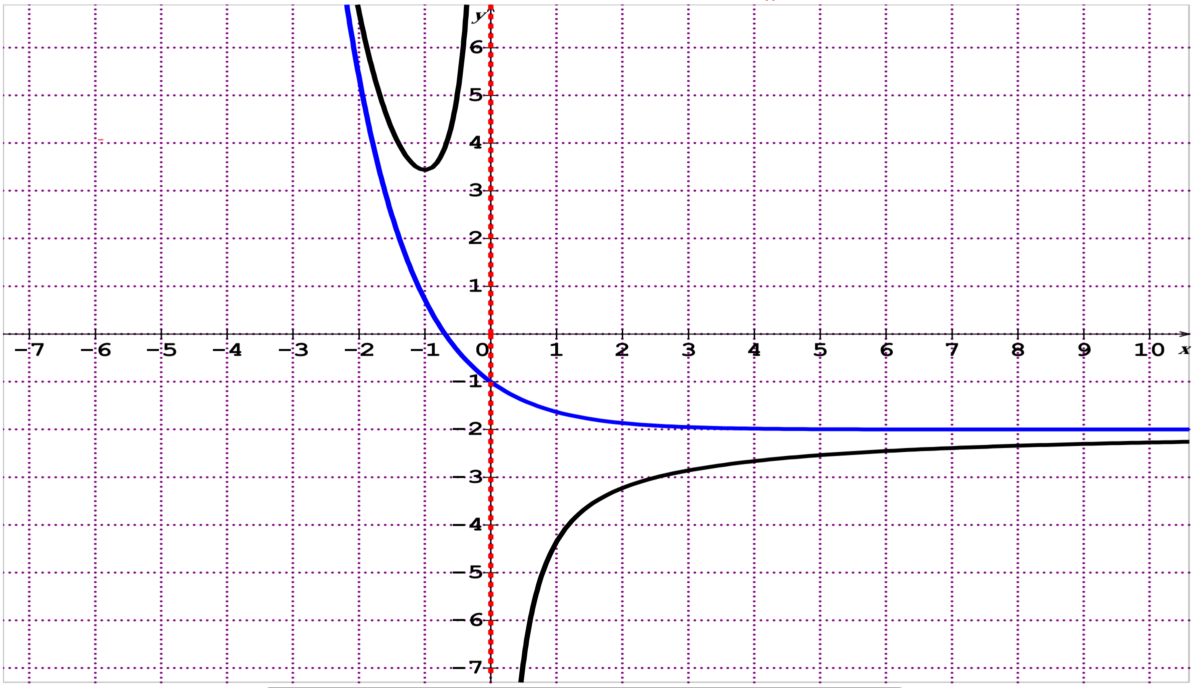
5) تبيّان كيف يمكن انشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \to e^x$.

لدينا المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$

ومنه المنحنى (γ) هو صورة منحنى الدالة $x \to e^{-x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$

علما أن منحنى الدالة $x \to e^{-x}$ هو نظير منحنى الدلة $x \to e^{x}$ بالنسبة لمحور التراتيب

رسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق .



التمرين17:دورة 2016

1-I) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

لدينا:الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{t\to+\infty} g(t)=\lim_{t\to+\infty} t^2e^t=+\infty$ حيث $t=-x$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ لأن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to-\infty} g(t)=\lim_{t\to-\infty} 1+t^2e^t=1$ حيث $t=-x$

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x)=(2x+1)e^{-x}+(-1)e^{-x}(x^2+x-1)=(-x^2+x+2)e^{-x}$

لدينا: $g'(x)=0$ معناه $(-x^2+x+2)=0$ ومعناه $x=-1$ أو $x=2$

$g'(x)\succ 0$ معناه $-1\prec x\prec 2$ أي الدالة g متناقصة تماماعلى $]-1;2[$

$g'(x)\succ 0$ معناه $x\succ 2$ أو $x\prec -1$ أي الدالة g متزايدة تماماعلى $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$g(-1)$	↗	$g(2)$	↘	1

2-أ)تبيّان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1{,}52\prec\alpha\prec-1{,}51$

*المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم لأن $g(0)=1+(0^2+-1)e^0=0$.

* لدينا:الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ (أنظر جدول تغيرات g)
ولدينا: $g(-1,52)\times g(-1,51)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]1,59;1,60[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$.

باستعمال الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+x^2e^{-x})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}(t+t^2e^{t})=-\infty$ (نضع $-x=t$) علما أن $\lim\limits_{t\to-\infty}(t^2e^{t})=0$ نهاية شهيرة

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$

لدينا: $f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}+(-1)e^{-x}(x^2+3x+2)=-\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=-g(x)$

ج)تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

من العبارة $f'(x)=-g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$
وعليه جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ يكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$

د)تعيين ودون حساب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ **والتفسير الهندسي للنتيجة.**

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$ لأن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا يوازي حامل موحور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$

2-أ) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائلا (Δ) حيث: $y=-x$ معادلة له عند $+\infty$

المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}t^2e^{t}=0$ نهاية شهيرة

ب)دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=(x^2+3x+2)e^{-x}$
اشارة الفرق هي حسب اشارة (x^2+3x+2) لأن $e^{-x}\succ0$
$(x^2+3x+2)=0$ معناه $x=-2$ أو $x=-1$ و الفرق يكون موجب تماما لأن المستقيم (Δ) مقارب في جوار $+\infty$ أي $x\in[0;+\infty[$ وعليه (C_f) يكون فوق (Δ)

ج) تبيان أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما

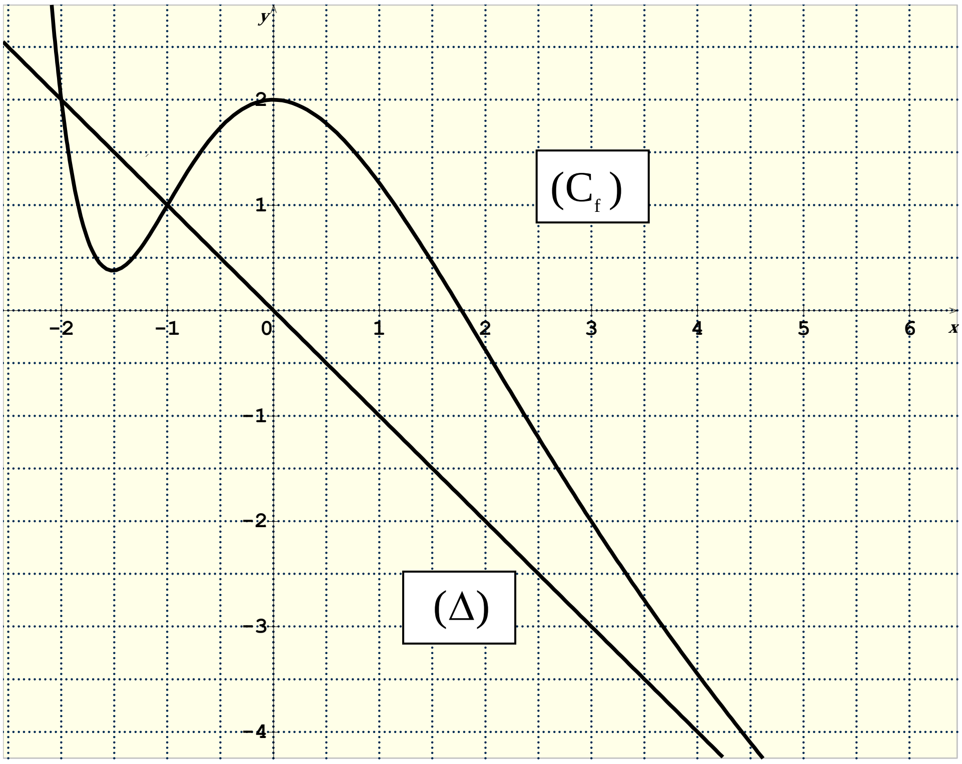
لدينا: $f'(x)=-g(x)$ وعليه $f''(x)=-g'(x)$ ومنه اشارة $f''(x)$ هي حسب الجدول المقابل:

الجدول يبين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

احداثياهما: $(-1;1)$ و $(2;-2+\frac{12}{e^2})$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 2 $\quad +\infty$
اشارة $f''(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

د)رسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$



هـ)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$

نضع: $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0...(1)$

(1) تكافئ الجملة: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=-m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

والمستقيم $(\Delta_m): y=-m$ (مستقيم يوازي محور الفواصل) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \succ -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا وحيداموجب ، 2) $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين .

3) $-f(\alpha) \prec m \prec -2$ المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب

4) $m=-2$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف معدوم وأخر سالب .

5) $m \succ -2$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين18:دورة 2016 الاستدراكية

I-1-أ)حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$

حساب $g'(x)$: لدينا: $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة اتجاه تغير g' : نحسب $g''(x)$ وندرس اشارته

لدينا: $g'(x)=2e^x-2x$ ومنه : $g''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

$g''(x)=0$ معناه $(e^x-1)=0$ ومعناه $e^x=1$ وعليه $x=\ln 1=0$

$x\prec 0$ معناه $g''(x)\prec 0$ ومنه الدالة g' متناقصة على المجال $]0;+\infty[$

$x\succ 0$ معناه $g''(x)\succ 0$ ومنه الدالة g' متزايدة على المجال $]-\infty;0[$

ب)تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)\succ 0$

من الجواب السابق نستنتج أن الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى هي $g'(0)=1$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)\succ 1$ ومنه $g'(x)\succ 0$

جـ)حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وتشكيل جدول تغيراتها

*$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-x^2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\frac{2e^x}{x^2}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x=+\infty$

* g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن $g'(x)\succ 0$ وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1{,}38\prec\alpha\prec-1{,}37$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(-1{,}38)\times g(-1{,}37)\prec 0$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $-1{,}38\prec\alpha\prec-1{,}37$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على من أجل كل عدد حقيقي x.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا: الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-\frac{x}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}$ ، لاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

ب) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xe^x.g(x)}{(e^x-x)^2}$

$$f'(x)=\frac{(2x+x^2)(e^x)'(e^x-x)-(e^x)'(x^2e^x)}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^x(2e^x-x^2-x)}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$$

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وتشكيل جدول تغيراتها

نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي من اشارة الجداء $x.g(x)$ وهي حسب الجدول المقابل وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
(x)		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ)تبيان أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}$ ومن جهة أخرى لدينا: $g(\alpha)=0$ ومنه $e^\alpha=\dfrac{1}{2}(\alpha^2+\alpha)$

ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha)}{\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha)-\alpha}=\dfrac{\alpha^4+\alpha^3}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{(\alpha^3+\alpha^2)}{(\alpha-1)}=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

*لدينا: $-1,38\prec\alpha\prec-1,37$ تكافئ $-0,76\prec2\alpha+2\prec-0,74.....(1)$

لدينا: $-1,38\prec\alpha\prec-1,37$ تكافئ $(-1,37)^2\prec\alpha^2\prec(-1,38)^2.....(2)$

بجمع (1) و(2) طرف لطرف نجد: $1,12\prec\alpha^2+2\alpha+2\prec1,16....(3)$

لدينا: $-1,38\prec\alpha\prec-1,37$ تكافئ: $-2,38\prec\alpha-1\prec-2,37$

وتكافئ $-\dfrac{2}{2,37}\prec\dfrac{2}{\alpha-1}\prec-\dfrac{2}{2,38}.....(4)$

بجمع (3) و(4) طرف لطرف نجد: $0,27\prec\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}\prec0,32$

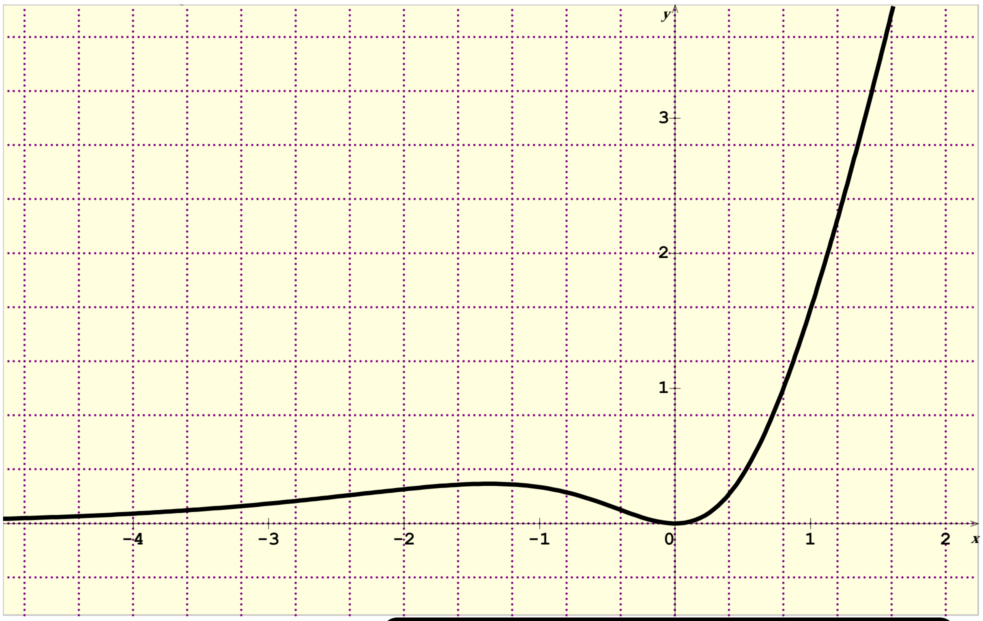
ومنه: $0,27\prec f(\alpha)\prec0,32$

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$ وتفسير النتيجة بيانيا.

*لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3}{e^x-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^2}}\right]=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=0$ معناه منحنى الدالة "مربع" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج) رسم المنحنى (C_f)



التمرين19:دورة 2015

I -1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g'(x)=(1-2x)'-(e^{2x-2})'=-2-2e^{2x-2}=-2(1+e^{2x-2})$

$g'(x)\prec 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لأن: $(1+e^{2x-2})\succ 0$.وعليه تكون g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و التحقق أن : $0{,}36\prec\alpha\prec 0{,}37$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$.

لدينا: $g(0{,}36)=0{,}002$ و $g(0{,}37)=-0{,}02$ أي $g(0{,}36)\times g(0{,}37)\prec 0$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $0{,}36\prec\alpha\prec 0{,}37$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة

من أجل $x=\alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة

من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة.

II) 1-أ) إثبات أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

لدينا: $f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-e^{2x+2}\times e^{-2x-2}$

أي: $f'(x)=e^{2x+2}(1-2(-x)-e^{2(-x)-2})=e^{2x+2}g(-x)$

أ) استنتاج أن f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha[$ ومتزايدة على $]-\alpha;+\infty[$

من العبارة $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$ نستنتج أن اشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(-x)$

$g(-x) \prec 0$ معناه $-x \in]\alpha;+\infty[$ أي $x \in]-\infty;-\alpha[$

$g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ أي $x=-\alpha$.

$g(-x) \succ 0$ معناه $-x \in]-\infty;\alpha[$ أي $x \in]-\alpha;+\infty[$

ومنه: f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

ح.ع.ت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ لكن $f(x)=x(e^{2x+2}-1)+1$ وعليه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{2x+2}-1)+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+2}=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+1)=+\infty$.

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]=\lim_{x\to-\infty}[xe^{2x+2}]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^2}{2}[2xe^{2x}]=\lim_{u\to-\infty}\frac{e^2}{2}[ue^{u}]=0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]=0$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=0$

ومنه المستقيم ذي المعادلة: $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=-x+1$

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(-x+1)]$

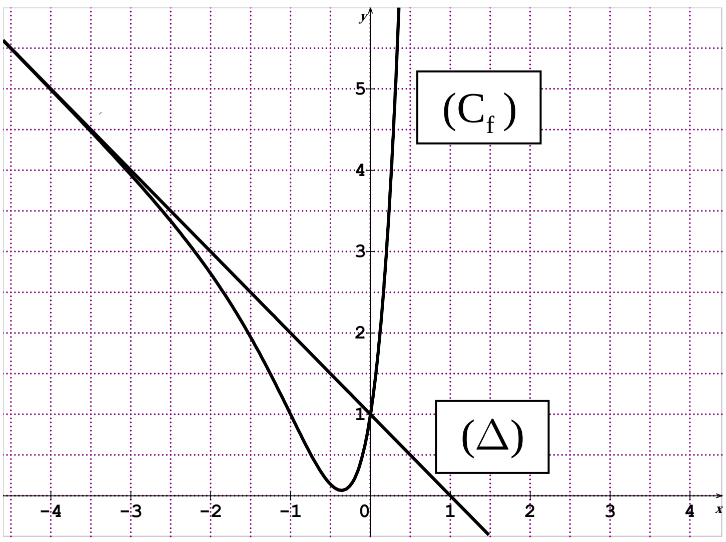
لدينا: $[f(x)-(-x+1)]=xe^{2x+2}$ وإشارته حسب إشارة x لأن $e^{2x+2} \succ 0$

وعليه: $x \in]-\infty;0[$ معناه الفرق سالب أي (C_f) **تحت** (Δ) .

$x=0$ معناه الفرق معدوم أي (C_f) يقطع (Δ) في نقطة احداثياها $(0;1)$

$x \in]0;+\infty[$ معناه الفرق موجب أي (C_f) فوق (Δ) .

5) إنشاء (Δ) و (C_f) في المجال المذكور.



التمرين20:دورة 2013

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$

لدينا: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $]-\infty;1[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=2$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}}=1$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\left(\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} e^{\frac{1}{x-1}}=0$

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن :

المستقيم ذا المعادلة : $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2) حساب $f'(x)$ **وتبيان أن f متناقصة تماما على** $]-\infty;1[$

لدينا: $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\left[1+e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x)<0$ لأن $1+e^{\frac{1}{x-1}}>0$ و $\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		α		1
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α:

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=-\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha\in]-\infty;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21)=0,016$ و $f(0,22)=-0,005$

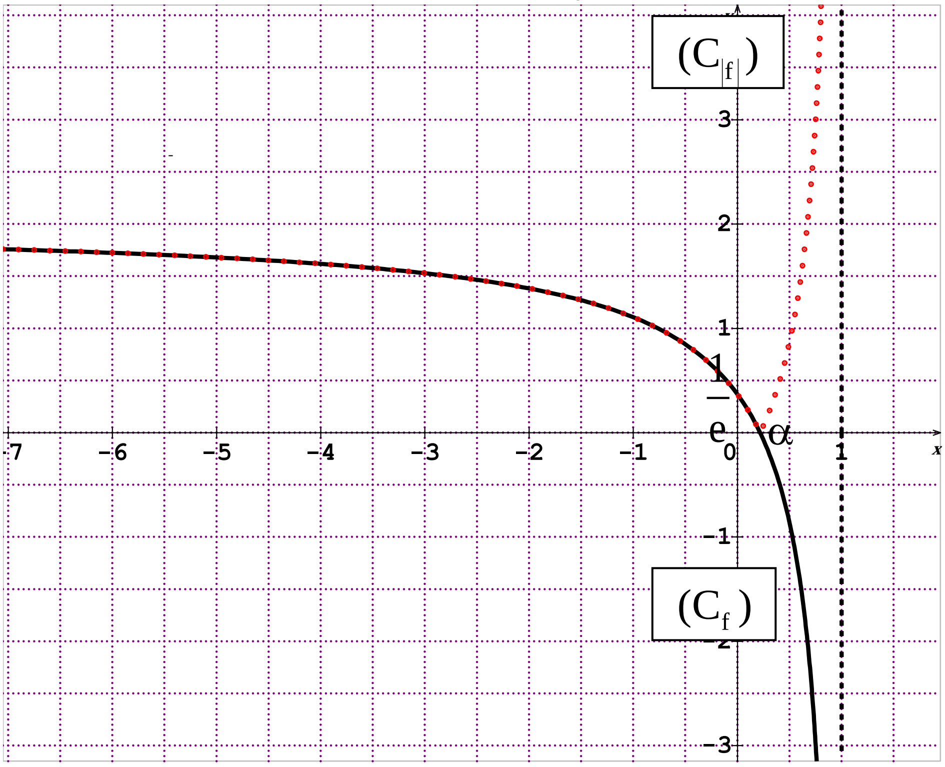
من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha\in]0,21;0,22[$.

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) **و** (C') **المنحنى الممثل للدالة** $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;x\in]-\infty;\alpha] \\ -f(x) & ;x\in]\alpha;1[\end{cases}$

ومنه : $x\in]-\infty;\alpha]$ معناه $(C')=(C)$ و $x\in[\alpha;1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل



5) تعيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة معناه المستقيم ذو المعادلة $y=m$ يقطع المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين من البيان نجد أن : $m\in]e^{-1};2[$

II-1) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty;1[$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$

*لدينا: $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g'(x)=2f'(2x-1)$ وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ لأن $f'(2x-1)\prec 0$ وعليه جدول تغيرات الدالة g هو

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	2 ↘ $-\infty$

أ) التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ **وأن:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=f(\alpha)=0$ من الجواب 3 و $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=2f'(\alpha)$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y=g'(\frac{\alpha+1}{2})(x-\frac{\alpha+1}{2})+g(\frac{\alpha+1}{2})$ ومنه: $(T): y=2f'(\alpha)(x-\frac{\alpha+1}{2})+0$

جـ) التحقق أن: $y=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}-\frac{-1}{(\alpha-1)^2}e^{\frac{1}{\alpha-1}}$ لكن: $f(\alpha)=0$ معناه $-\frac{\alpha}{(\alpha-1)}=e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

ومنه : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)^3}=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$ وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$$(T): y=2\frac{1}{(\alpha-1)^3}(x-\frac{\alpha+1}{2})=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

التمرين21:دورة 2012

I-1) حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ لأن $\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x)=(1-xe^x)'=0-(1e^x+xe^x)=e^x(-x-1)$

$g'(x)=0$ معناه $(-x-1)=0$ لأن $e^x\succ 0$ معناه $(-x-1)=0$ أي $x=-1$ و $g(-1)=1+e^{-1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	−	

وعليه جدول التغيرات يكون كالآتي

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	1	↗	$g(-1)$	↘	$-\infty$

3-أ) تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $g(-1)\succ 0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث يحقق $f(\alpha)=0$.

ب) التحقق أن $0,5\prec\alpha\prec 0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g(0,5)\succ 0$ و $g(0,6)\prec 0$ ومنه $0,5\prec\alpha\prec 0,6$

لدينا: $g(]-\infty;\alpha[)=]1;0[$ معناه $g(x)\succ 0$ و $g(]\alpha;+\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$.

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-x)=\lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)=+\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;2]$: $f'(x)=-g(x)$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;2]$: $f'(x)=1e^x+(x-1)e^x-1=-(1-xe^x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ **على** $]-\infty;2]$ **وتشكيل جدول تغيراتها**

من العبارة $f'(x)=-g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

وعليه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(2)$

3) تبيّان أن $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ **واستنتاج حصرا لـ** $f(\alpha)$

لدينا: $0,6\prec\alpha\prec 0,5....(1)$ ومنه: (1) تكافئ $0,25\prec\alpha^2\prec 0,36$ وتكافئ $1,25\prec\alpha^2+1\prec 1,36....(2)$

من (1) و(2) نجد: $\dfrac{1,36}{0,5}\prec\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec\dfrac{1,25}{0,6}$ أي $2,72\prec\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec 2,08$ ومنه $-2,72\prec f(\alpha)\prec -2,08$

4-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) **مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **بجوار** $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=(x-1)e^x$ إشارة الفرق $(x-1)e^x$ هي حسب إشارة $(x-1)$ لأن $e^x\succ 0$

وعليه وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تكون حسب الجدول التالي.

x	$-\infty$		1		2
إشارة الفرق		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

5-أ) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حليّن** x_1 **و** x_2

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و $f(-1,5)=-0,05$ و $f(-1,6)=0,07$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_1 حيث

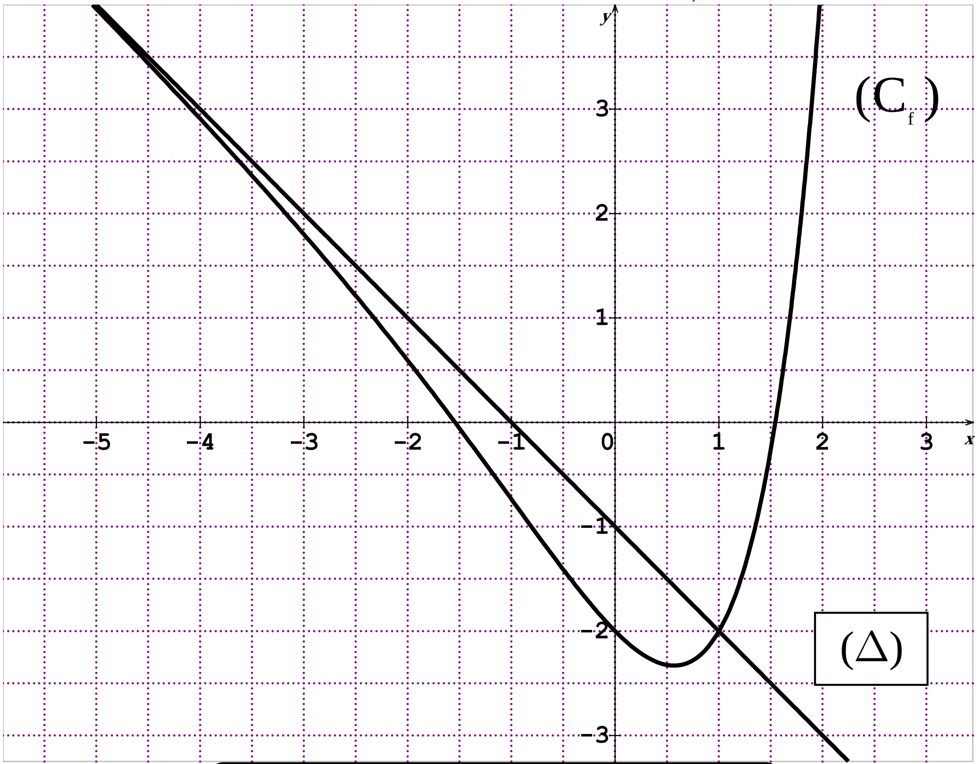
$-1,6\prec x_1\prec -1,5$ يحقق $f(x_1)=0$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;2[$ و $f(1,5)=-0,26$ و $f(1,6)=0,37$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقيوحيد x_2 حيث

$1,5 \prec x_2 \prec 1,6$ يحقق $f(x_2)=0$

ب) إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)



التمرين22:دورة 2011

1-أ)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=0+\infty-1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)=+\infty-\infty$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

$f'(x)=e^x-e$ و $f'(x)=0$ معناه $x=1$

وإشارته $f'(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جـ)تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ)بيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=-ex-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب) كتابة معادلة للمماس (T)

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

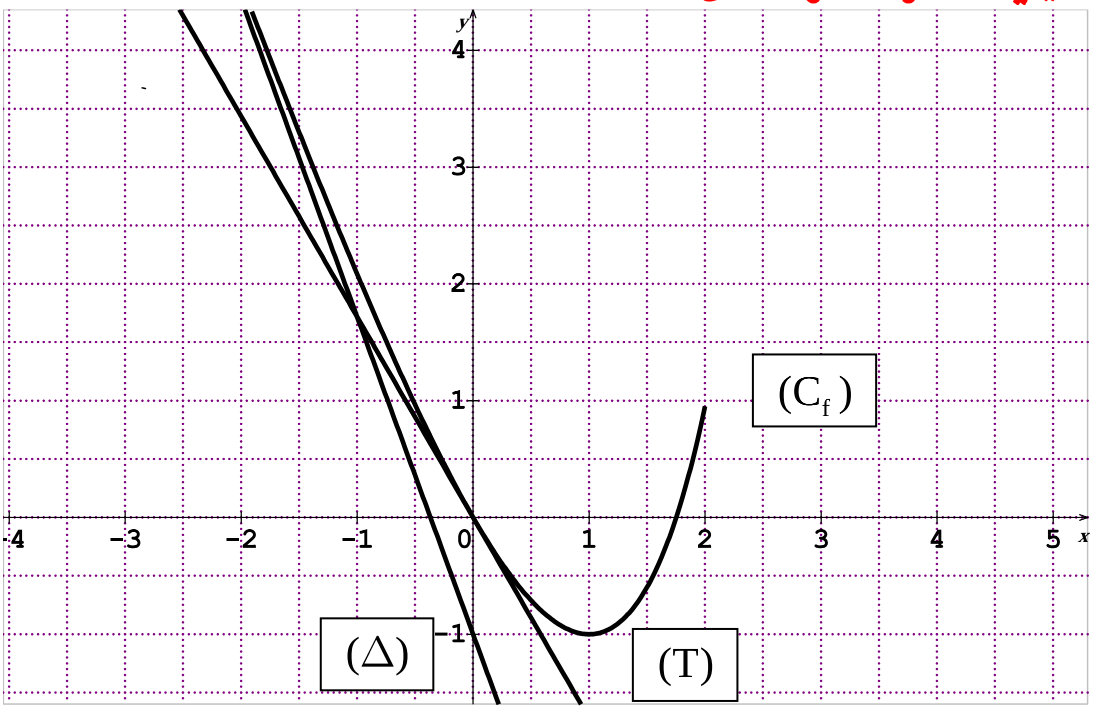
ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=(1-e)(x)+0=(1-e)x$

جـ) تبيان ان المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$ و $f(1,76)=0,028$ ، $f(1,75)=-0,0023$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين $1,75$ و $1,76$ يحقق: $f(\alpha)=0$

د) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f)



التمرين 23: دورة 2010

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x+0=+\infty$$

ب) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ التفسير الهندسي

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=+\infty$$

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة : $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $f'(x)=1-\left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}\right)=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$ ، $f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

أ-تبيين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ')

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=0$ ومنه : (Δ): مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=0$ ومنه : (Δ'): مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـكل من (Δ) و (Δ')

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)-x=\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)\prec 0$ معناه (C_f) تحت (Δ)

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}_-^*$: $f(x)-(x+1)=\left(\dfrac{-e^x}{e^x-1}\right)\succ 0$ معناه (C_f) فوق (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

$\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر لـ (C_f) معناه $f(-x)+f(x)=1$

لدينا: $f(-x)+f(x)=-x-\dfrac{1}{e^{-x}-1}+x-\dfrac{1}{e^x-1}=-\dfrac{e^x}{1-e^x}-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^x-1}=1$

5-أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$ و $f(\ln 2)\times f(1)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين $\ln 2$ و 1 يحقق: $f(\alpha)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$ و $f(-1,4)\times f(-1,3)\prec 0$

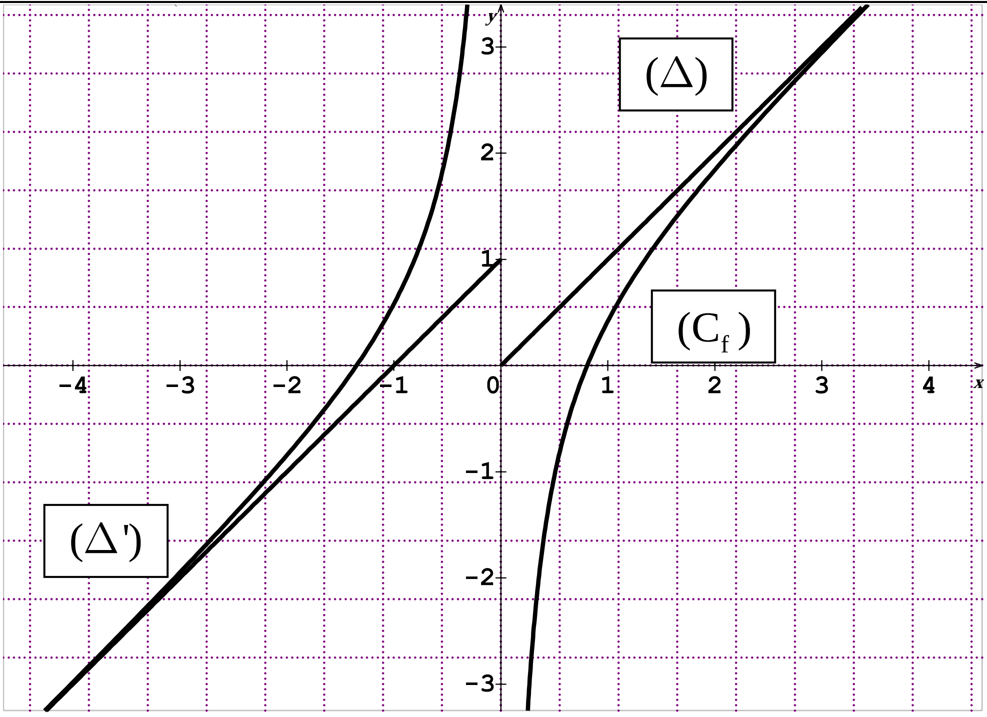
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين $-1,4$ و $-1,3$ يحقق: $f(\beta)=0$

ب) البحث عن وجود مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)

المماس لـ (C_f) يوازي (Δ) معناه $f'(x_0)=1$

ومنه: $1+\dfrac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=1$ أي $e^{x_0}=0$ هذه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد مماس يوازي (Δ)

جـ) رسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f)



د)المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

نضع: $(m-1)e^{-x}=m\ldots(1)$.

(1)تكافئ $(m-1)=me^{x}$ تكافئ $m(e^{x}-1)=-1$ تكافئ $x+m=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}=f(x)$

لدينا: $x+m=f(x)$ تكافئ $\begin{cases}y=x+m\\ y=f(x)\end{cases}$.حلول المعادلة (1)هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

المستقيم (Δ_m)ذو المعادلة: $y=x+m$ من البيان نجد:

1)إذا كانت $m\prec 0$ فإن المعادلة(1)تقبل حل موجب تماما.

2)إذا كانت $0\le m\le 1$ فإن المعادلة(1)لاتقبل حلول.

3)إذا كانت $m\succ 1$ فإن المعادلة (1)تقبل حل سالب تماما.

التمرين24:دورة 2008

I- تعيين العددين الحقيقين a و b

لدينا: $f(-1)=1$ معناه $(-a+b)e+1=1$ ومنه $a=b$

لدينا: $f'(-1)=-e$ معناه $(2a-b)e=-e$ ومنه $2a-b=-1$ نستنتج مما سبق أن $a=b=-1$

II-أ)تبيين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ والتفسير الهندسي

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{u\to-\infty} g(u)=\lim_{u\to-\infty}(ue^{u})+1=1$ نستنتج أن المستقيم ذوالمعادلة $y=1$ مقارب أفقي لـ (C_f).

ب)دراسة تغيرات الدالة g

النهايات: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ ، $g(-2)=e^{2}+1$

اتجاه التغير:

g قابلة للإشتقاق على D_f حيث: $f'(x)=g'(x)=xe^{-x}$ واشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات المقابل

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

ج)تبيين ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I

(C_g)يقبل نقطة انعطاف Iمعناه g'' ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $g'(x)=xe^{-x}$ ومنه: $g''(x)=(1-x)e^{-x}$

إشارة $g''(x)$ هي حسب اشارة $(1-x)$ وهي كمايلي

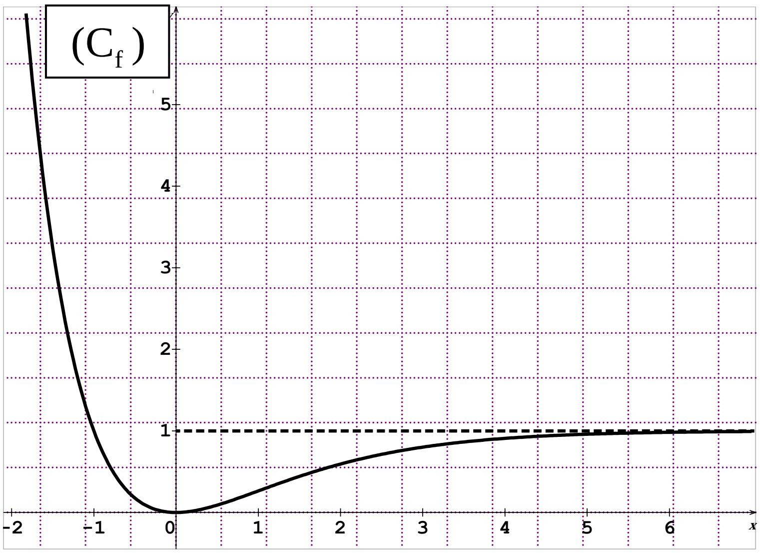
x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

$g(1)=-2e^{-1}+1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $I(1,g(1))$

د)كتابة معادلة المماس لـ(C_g) عند نقطة انعطاف I

$$y=g'(1)(x-1)+g(1)=e^{-1}x-3e^{-1}+1$$

هـ) إنشاء (C_g)



IIIتعيين اتجاه تغيير k وتشكيل جدول تغيراتها

kمعرفة على $[-2,+\infty[$ حيث: $k(x)=g(x^2)$

ومنه $k'(x)=2xg'(x^2)$ واشارة $k'(x)$ هي حسب اشارة x لأن $g(x^2)>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x^2)=1$ و $k(-2)=g(4)=-5e^{-2}+1$

جدول تغيرات الدالة k

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-5e^{-2}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

التمرين25: دورة 2019

I-أ)حساب $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$ بقراءة بيانية

من البيان نجد: $g(-1)=-\frac{1}{4}$ و $g(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

ب)استناج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بقراءة بيانية

من البيان الدالة g مستمرة ومتزايد تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و $g(-1)\times g(-\frac{1}{2})\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha)=0$

التحقق أن: $-0;8<\alpha<-0;7$

: $g(-0;8)=-0,01$ و $g(-0,7)=0,14$ أي $g(-0,8)\times g(-0,7)\prec 0$ ومنه $-0;8<\alpha<-0;7$

ج)استنتاج اشارة $g(x)$

من بيان الدالة g ومن الجواب 2-أ) نستنتج أن :

$g(]-\infty;\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$ و $g(]\alpha;+\infty[)=]0;+\infty[$ معناه $g(x)\succ 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^x-1)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x+2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$

2) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=g(x)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x)=(x+2)'.(e^x-1)+(x+2).(e^x-1)'=1.(e^x-1)+(x+2).(e^x)=(x+3).(e^x)-1=g(x)$.

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وعليه f متناقصة على $]-\infty;\alpha[$ ومتزايدة على $]\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3-أ)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ثم استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعين معادلة له

*لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)(e^x-1)+x=\lim_{x\to-\infty}(xe^x+2e^x-2)=-2$

لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0$ نهايتين شهيرتين

**$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=-2$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-2)\right)=0$ ومعناه ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) له معادلة من الشكل : $y=-x-2$ عند $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا: $f(x)-y=xe^x+2e^x=e^x(x+2)$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة $(x+2)$

وعليه من أجل كل $(x<-2)$ يكون (C_f) تحت والمستقيم (Δ)

و من أجل كل $(x>-2)$ يكون (C_f) فوق والمستقيم (Δ)

من أجل $(x=-2)$ يكون (C_f) يقطع والمستقيم (Δ) في النقطة التي احداثياها $(-2;0)$

ج) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

لتعيين معادلة المماس الموازي لـ (Δ) يجب البحث عن فاصلة نقطة التماس والتكن x_0

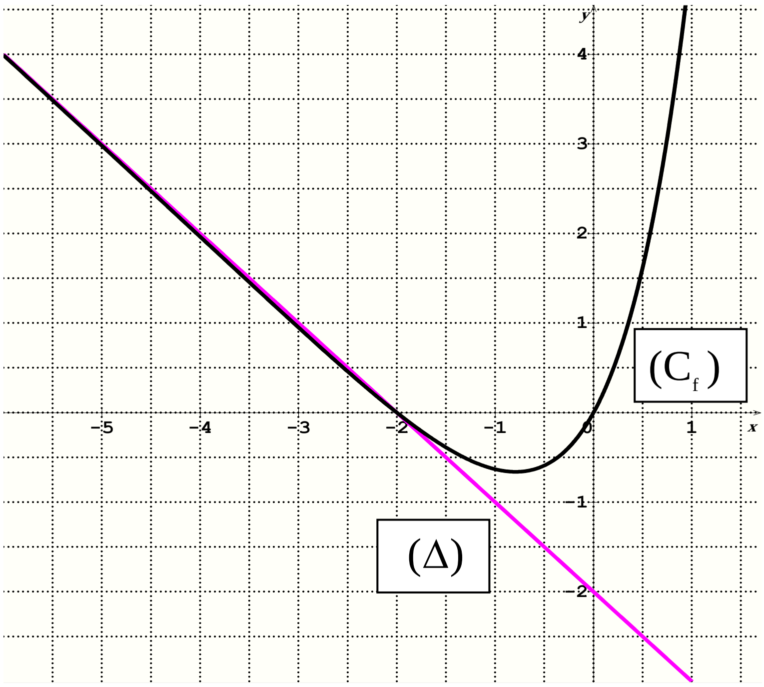
(C_f)يوازي (Δ) معناه $f'(x_0)=-1$ المماس والمستقيم (Δ) لهما نفس الميل

لدينا: $f(x_0)=-1$ تكافئ $g(x_0)=-1$ وتكافئ $(x_0+3)(e^{x_0})=0$ أي $x_0=-3$

المماس (T) له معادلة من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

أي : $y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$ أي: $y=-x-2+e^{-3}$

4) رسم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ علما أن: $f(\alpha)\simeq-0,7$



6-أ) اثبات ان الدالة h زوجية

لدينا:h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=|x|(e^{|x|}-1)$

نبرهن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ و $-x\in\mathbb{R}$: $h(-x)=h(x)$

لدينا: $h(x)=|-x|(e^{|-x|-2}-1)=h(x)=|x|(e^{|x|-2}-1)$ لأن: $|-x|=|x|$

ب) التأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $h(x)=f(x-2)+1$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$: $h(x)=x(e^{x-2}-1)......(1)$

ولدينا $f(x-2)+1=(x-2+2)(e^{x-2}-1)=x(e^{x-2}-1).....(2)$

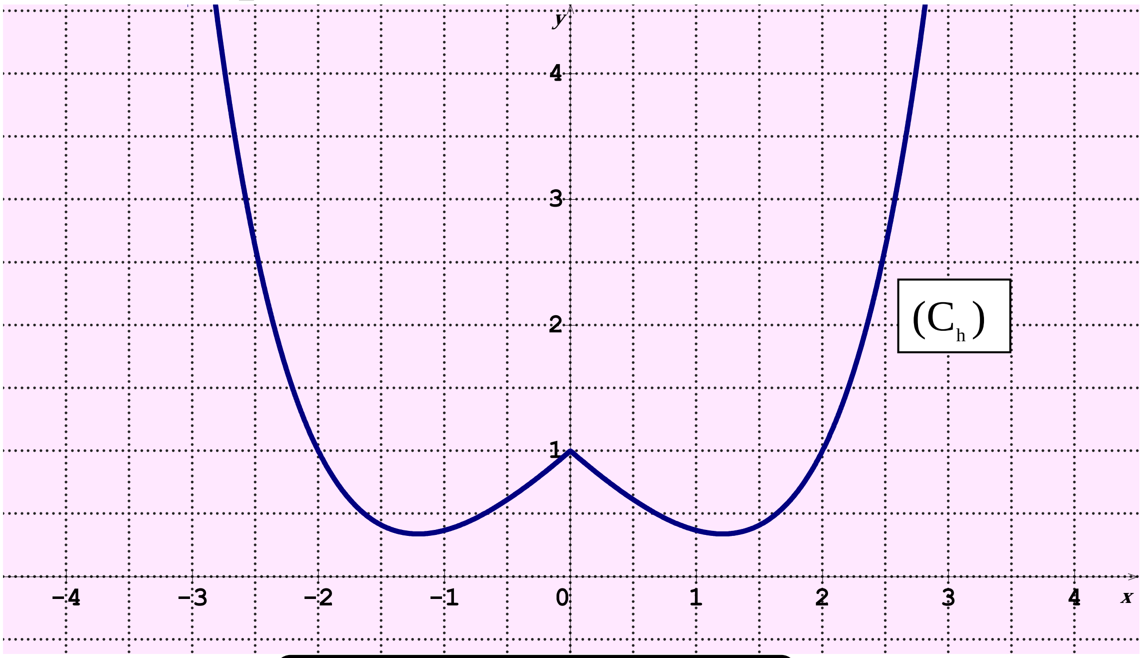
من (1) و(2) نستنتج ان $h(x)=f(x-2)+1$

ج) شرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_h) على المجال $[-3;3]$

العبارة $h(x)=f(x-2)+1$ تعني ان (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{2}{1}$ على المجال $[0;+\infty[$.

وعليه: (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{2}{1}$ على المجال $[0;3]$

(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب على المجال $[-3;0]$ لأن h زوجية.



التمرين26:دورة 2018

1) حساب: $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ **ثم تفسير النتيجة بيانيا ، ثم حساب** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}e^{-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}e^{-1}=-\infty^{*}$$ لأن $\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ معناه المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}e^{-x}=1\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty^{**}$$

2-تبيان أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$.

لدينا: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}.e^{-x}+(-1)\left(\frac{x}{x-1}\right).e^{-x}=\frac{-x^2+x-1}{(x-1)^2}.e^{-x}$

$f'(x)<0$ لأن $-x^2+x-1<0$ المميز $\Delta<0$ ومعامل x^2 سالب

وكذلك كلا من $e^{-x}>0$ و $(x-1)^2>0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

الدالة f متناقصة تماما على مجال تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$ 0 1
f'(x)	−
f(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3- أ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

لدينا: (T) له معادلة من الشكل : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $a=0$

ولدينا: $f'(0)=-1$ و $f(0)=0$ ومنه : $y=-1(x-0)+0$ أي $y=-x$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة h ثم استنتاج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x)\geq 0$.

لدينا: h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x)=e^{-x}+x-1$ ومنه : $h'(x)=-e^{-x}+1$

$h'(x)=0$ معناه $-e^{-x}+1=0$ ومنه $x=0$

$h'(x)<0$ معناه $-e^{-x}+1<0$ ومنه $x<0$ و $h'(x)>0$ معناه $-e^{-x}+1>0$ ومنه $0<x<1$

نستنتج أن : $h(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة h

وعليه نستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x)\geq 0$.

4) تبيان أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x)+x=\frac{xh(x)}{(x-1)}$.

لدينا: $f(x)+x=\frac{x}{x-1}e^{-x}+x=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{x-1}=\frac{xh(x)}{(x-1)}$

استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) وتفسير النتيجة بيانيا.

العبارة $f(x)+x=\frac{xh(x)}{(x-1)}$ تكتب على الشكل $f(x)-(-x)=\frac{xh(x)}{(x-1)}$

إشارة الفرق $f(x)-(-x)$ تحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

وهو حسب اشارة العبارة $\frac{xh(x)}{(x-1)}$ والموضحة في فيما يلي

1-من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ يكون $f(x)-(-x)>0$ ومعناه يكون (C_f) فوق (T)

2-من أجل كل $x\in]0;1[$ يكون $f(x)-(-x)<0$ ومعناه يكون (C_f) تحت (T)

3-من $x=0$ يكون $f(x)-(-x)=0$ ومعناه يكون (C_f) يقطع (T) في نقطة المبدأ O

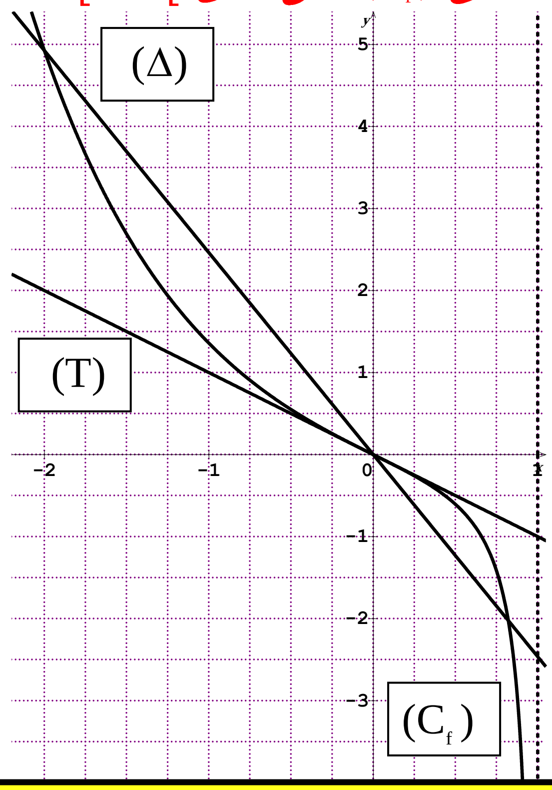
نستنتج مما سبق أن المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في نقطة المبدأ O
ومنه نقطة المبدأ O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

5) كتابة معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O و النقطة $A(-2;\frac{2}{3}e^2)$.

المستقيم (Δ) الذي يشمل مبد له معادلة من الشكل : $y = ax$ لأنه يشمل المبدأ المعلم O

$A \in (\Delta)$ معناه $\frac{2}{3}e^2 = -2a$ ومعناه $a = -\frac{1}{3}e^2$ ومنه (Δ) له معادلة من الشكل $y = -\frac{1}{3}e^2x$

رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-2;1[$.



التمرين27:دورة 2017 الاستثنائية

I-) دراسة اتجاه تغير الدالة g واستنتاج اشارة $g(x)$

*لدينا: الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x) = -(2e^{-x} - 2xe^{-x}) = 2e^{-x}(x-1)$

لدينا: إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$ حيث $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$

وعليه تكون الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;1[$

*لدينا $g(1) = 1 - 2e^{-1} \succ 0$ أي $g(1)$ قيمة حدّية صغرى لـ g نستنتج أن إشارة $g(x) \succ 0$

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2e^{-x}) = 1$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=1.(1+2e^{-x})+(x+1)(-2e^{-x})=1+2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}=g(x)$$

من العبارة $f'(x)=g(x)$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ أي $f'(x)\succ 0$

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2-أ) تبيّان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثم استنتاج معادلة لـ: (Δ) لمقارب المائل للمنحنى (C_f).

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)(1+2e^{-x}-1)=2\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

توضيح: $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=-\lim\limits_{u\to-\infty}ue^{u}=0$ نهاية شهيرة.

من العبارة $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ نستنتج أن :

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=(x+1)(2e^{-x})$

لدينا: $f(x)-y=0$ من أجل $x=-1$ ويكون (C_f) يقطع (Δ) في نقطة احداثييها $(-1;0)$

$f(x)-y\prec 0$ من أجل كل $x\in]-\infty;-1[$ ويكون (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

: $f(x)-y\succ 0$ من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ويكون (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) أثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) و تعيين معادلة له.

المماس (T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه معناه $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ تكافئ $g(x_0)=1$ وعليه $-2x_0e^{-x_0}=0$ أي $x_0=0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

كتابة معادلة للمماس (T) : المماس (T) له معادلة من الشكل :

$y=1(x-0)+f(0)=x+3$ أي $y=x+3$

4) تعييّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حليّن مختلفين.

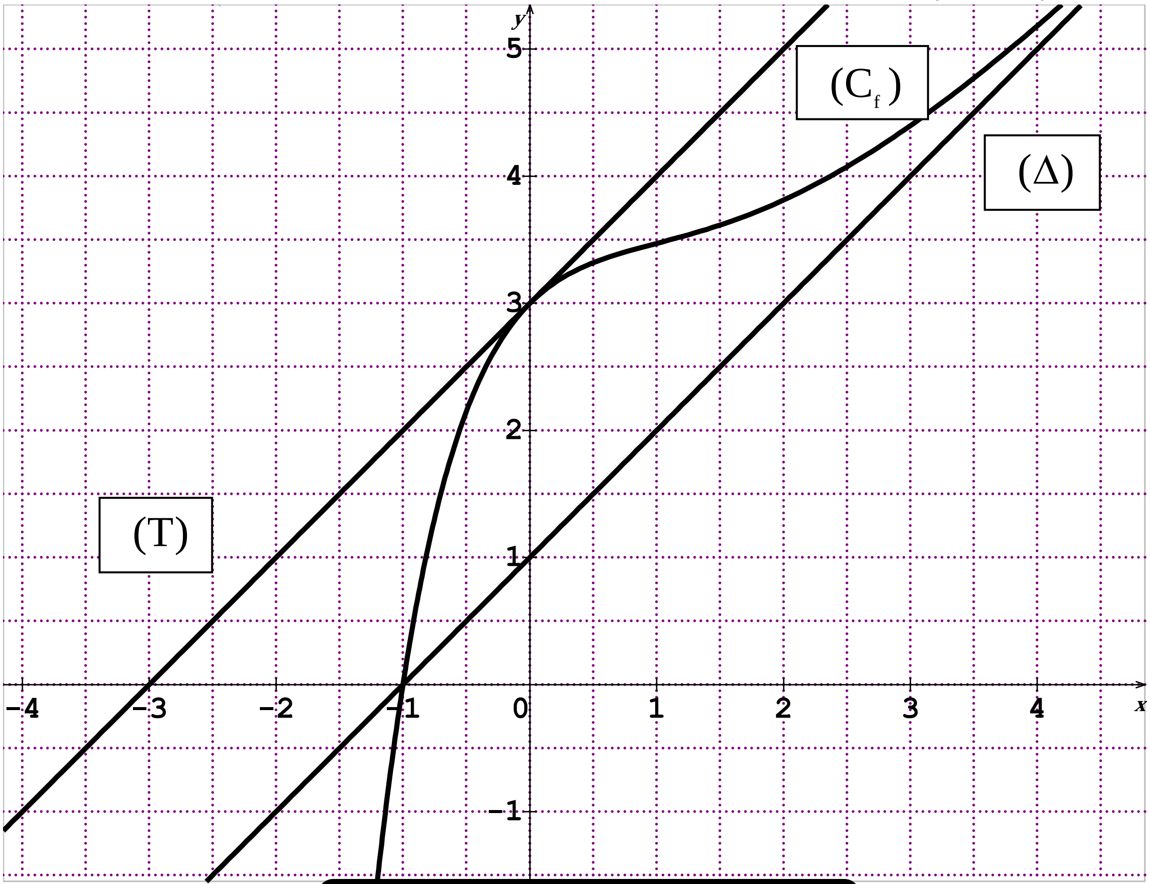
لتعيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حليّن مختلفين

نستعمل المنحنى (C_f) والموجود في آخر الحل

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيا هي الحل البياني للجملة $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

وهي فواصل نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x+m$ والمنحنى (C_f)

من البيان يكون للجملة $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$ حلين مختلفين معناه (Δ_m) يقع في الشريط الذي حداه المستقيمين (T)و (Δ) وعليه $1 \prec m \prec 3$.



التمرين28:دورة 2015

I -1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-2=-2$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

2)دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g'(x)=1.e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$: وإشارته هي حسب إشارة$x+3$

وعليه ج تغيرات الدالة g كمايلي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	-2 ↘	$g(-3)$	↗ $+\infty$

3) حساب $g(0)$ استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا: $g(0)=(0+2)e^{0}-2=0$ ومن جدول التغيرات للدلة g لدينا:

$g(x)\prec 0$ من أجل كل $]-\infty;0[$ و $g(x)\succ 0$ من أجل كل $]0;+\infty[$

I I -1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ثم حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+3-(x+1)e^{x}\right]$ حالة عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\dfrac{2x+3}{x+1}-e^{x}\right]=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x+3}{x+1}\right]=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{x})=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x+3-(x+1)e^{x}\right]=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$.

2)أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=-g(x)$.

لدينا: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$ ومنه: $f'(x)=2-\left[1.e^{x}+(x+1).e^{x}\right]=2-(x+2)e^{x}=-g(x)$

ب)استنتاج إشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=-g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$

ج) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$(\Delta): y=2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$ نهاية شهيرة

* **دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ): ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(2x+3)$

من الجواب السابق لدينا: $f(x)-(x+1)=-(x+1)e^{x}$

إشارة الفرق هي من إشارة $-(x+1)$ لأن $e^{x}\succ 0$

* $-(x+1)=0$ ومنه $x=-1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي فاصلتها -1

* $-(x+1)\prec 0$ ومنه $x\succ -1$ معناه (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-1;+\infty[$

* $-(x+2)\succ 0$ ومنه $x\prec -1$ معناه (C_f) فوق (Δ) في المجال $]-\infty;-1[$.

3-أ)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن α و β

* الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;0]$

$f(-1,56)=-0,0023$ و $f(-1,55)=0,016$ أي $f(-1,55)\times f(-1,56)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث:

$-1{,}56 \prec \beta \prec -1{,}55$ يحقق $f(\beta)=0$ أي β حلا وحيد للمعادلة $f(x)=0$.

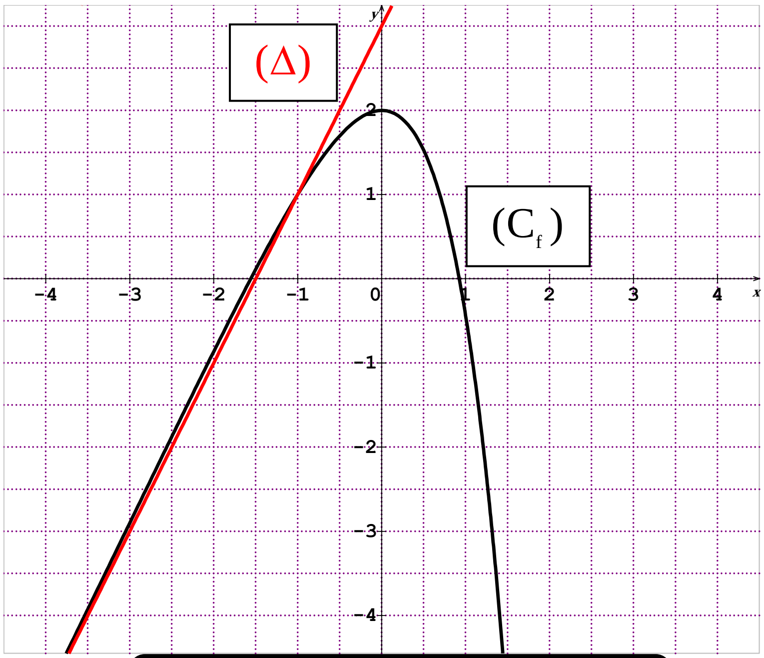
* الدالة f مستمرة و متناقصة على المجال $]0;+\infty[$

$f(0{,}92)=0{,}022$ و $f(0{,}93)=-0{,}031$ أي $f(0{,}92)\times f(0{,}93)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث:

$0{,}92\prec\alpha\prec 0{,}93$ يحقق $f(\alpha)=0$ أي α حلا وحيد للمعادلة $f(x)=0$.

ب)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$



التمرين29:دورة 2014

1-تعييّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا:f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)e^x=0$ ن شهيرة

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x)=[(x-1)e^x]'=1.e^x+(x-1).e^x=xe^x$ وشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	$+\infty$

3-أ) تبيّان أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. ثم التحقق أن: $1{,}27\prec\alpha\prec 1{,}28$

f مستمرة و متزايدة على المجال $]0;+\infty[$

و $f(0)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أي $1\in]-1;+\infty[$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha)=1$.

ولدينا: $f(1{,}27)=0{,}96$ و $f(1{,}28)=1{,}007$ أي $f(1{,}27)\prec f(\alpha)\prec f(1{,}28)$ ومنه $1{,}27\prec\alpha\prec 1{,}28$

ب) كتابة معادلة لـ(T)مماس (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(T) له معادلة من الشكل $y = f'(1)(x-1)+f(1) = (e)(x-1)+0 = e(x-1)$ ومنه: $y = e(x-1)$

تحديد وضعية (C_f)بالنسبة لـ(T)

لدراسة وضعية(T)بالنسبة لـ(C_f)ندرس اشارة الفرق

$f(x)-y = (x-1)e^x-(x-1)e = (x-1)(x-e)$

العبارتان $(x-1)$ و $(x-e)$ ينعدمان عند 1 ولهما نفس الإشارة وهي:

من أجل $x<1$ العبارتان $(x-1)<0$ و $(x-e)<0$ وعليه $(x-1)>0$ $(x-e)$

من أجل $x>1$ العبارتان $(x-1)>0$ و $(x-e)>0$ وعليه $(x-1)>0$ $(x-e)$

من أجل $x=1$ العبارتان $(x-1)=0$ و $(x-e)=0$ وعليه $(x-1)=0$ $(x-e)$

نستنتج مما سبق أن: المماس (T) يكون دوما فوق (C_f) ويمسه في النقطة التي احداثياها $(1;0)$

جـ) رسم (T) و (C_f) في آخر الحل

4)تعيّين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$حلاواحدا في $\mathbb{R}$

نضع: $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1.......(1)$

لدينا: (1) تكافئ$(x-1)e^x=(m-1)e^m-1.......(1)$ وتكافئ $f(x)=f(m)-1$

من البيان المعادلة$f(x)=f(m)-1$تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$معناه $f(m)-1\geq 0$.

$f(m)-1\geq 0$ومنه $f(m)\geq 1$ أي $m\geq\alpha$ لأن f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

5- أ)تبيّان أن الدالة h زوجية.

H زوجية معناه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $-x\in\mathbb{R}$: $h(-x)=h(x)$.

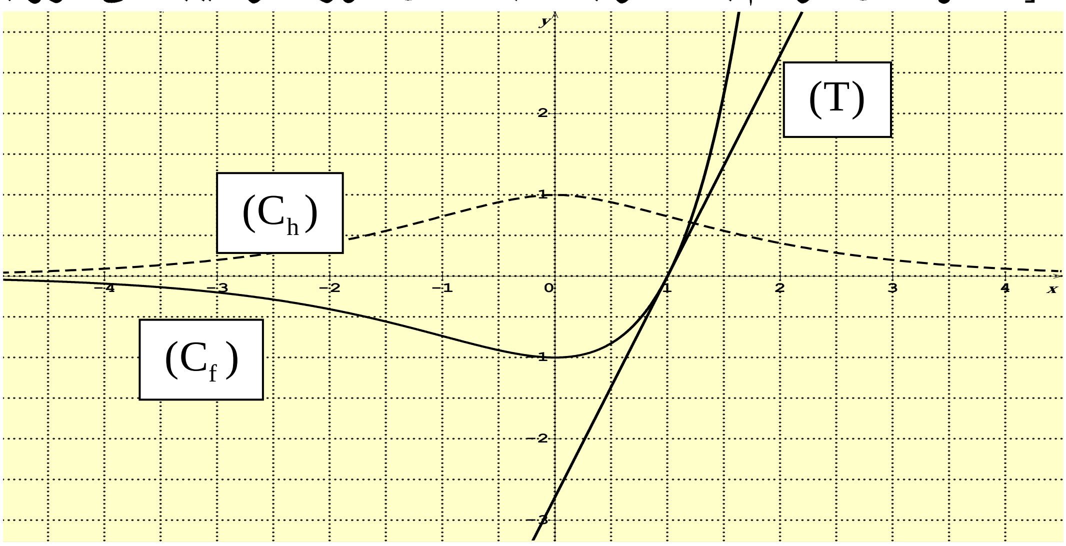
لدينا: $h(-x)=(|-x|+1)e^{-|-x|}=(|x|+1)e^{-|x|}=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$.

ب) رسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

$h(x)=\begin{cases}-f(x); x\in]-\infty;0[\\ f(x); x\in[0;+\infty[\end{cases}$ الجملة تعني أن(C_h)نظير(C_f)بالنسبة لحامل محور الفواصل

من أجل$x\in]-\infty;0[$ونكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب لأن hزوجية

رسم (C_h).



6)تعيّين a و b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x)$.

لدينا: $g(x)=(ax+b)e^{x}$

ومنه: $g'(x)=(a)+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$

$g'(x)=f(x)$ معناه $(ax+a+b)e^{x}=(x-1)e^{x}$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$.

التمرين30:دورة 2012

1-I) دراسة تغيرات الدالة g، وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$

النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-4-2xe^{x}=-4$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-2xe^{x}=-\infty$.

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$f'(x)=[(4-2x)e^{x}]'=-2.e^{x}+(4-2x).e^{x}=(2-2x).e^{x}$ وشارته هي حسب اشارة $(2-2x)$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-4	↗	$f(1)$	↘	$-\infty$

2)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1{,}59\prec\alpha\prec1{,}60$.

*المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم لأن $g(0)=0$.

* لدينا:الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

ولدينا: $g(1{,}59)=0{,}02$ و $g(1{,}60)=-0{,}03$ أي $g(1{,}60)\times g(1{,}59)\prec0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]1{,}59;1{,}60[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

باستعمال الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

1-II)تبيّان أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$

نبيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+1=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2-e^x}{e^x-2x}=0$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=0$.

2- أ)البرهان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

لدينا: $f'(x)=\frac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}=\frac{4e^x-2xe^x-4}{(e^x-2x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

ب)استنتاج إشارة $f'(x)$، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ (أنظرI-3)

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(0)$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

ج) حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج إشارة $f(x)$.

لدينا: $f(1)=0$ وإشارة $f(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3-أ)تبيّان أن : $f(\alpha)=-1+\frac{1}{\alpha-1}$.

لدينا $f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$ ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ والتي تكافئ $\frac{2}{2-\alpha}=\frac{4}{4-2\alpha-2}=e^\alpha$

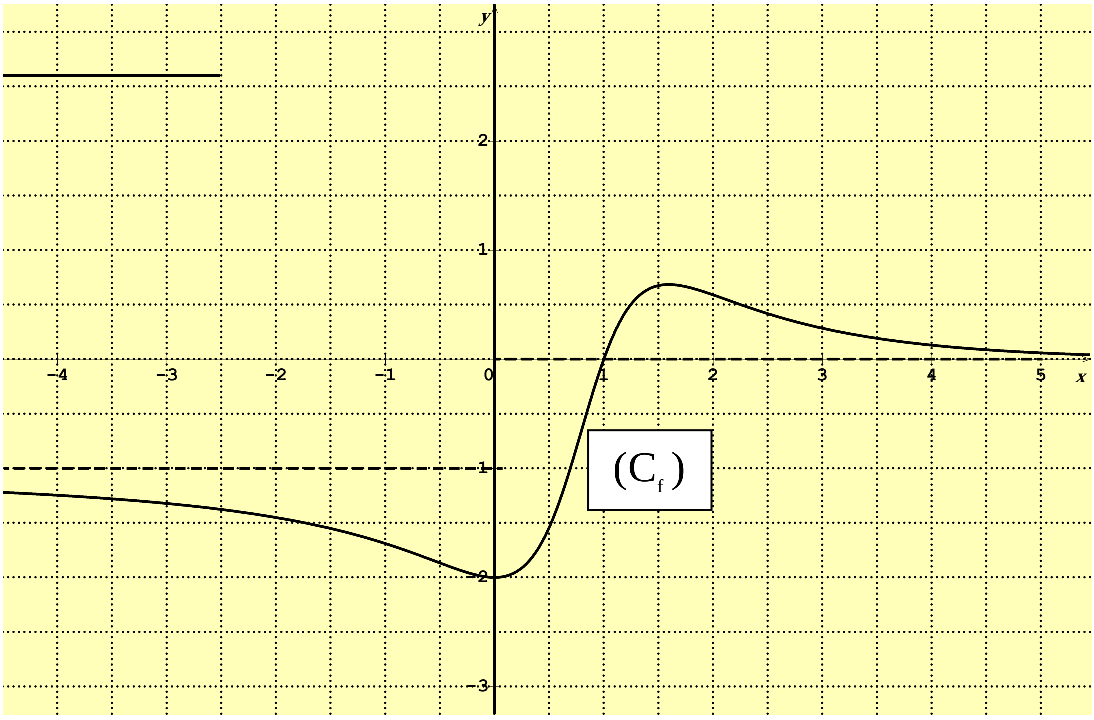
ومنه: $f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{(2-\alpha)}{(\alpha-1)}=-1+\frac{1}{\alpha-1}$

ب) استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $1{,}59\prec\alpha\prec1{,}60$ تكافئ $0{,}59\prec\alpha-1\prec0{,}60$ تكافئ $\frac{1}{0{,}59}\le\frac{1}{\alpha-1}\le\frac{1}{0{,}6}$

وتكافئ $0,66 \le -1+\frac{1}{\alpha-1} \le 0,69$ اذن $0,66 \le f(\alpha) \le 0,69$.

ج) رسم (C_f).



4-المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$

نضع: $2x-2=(e^x-2x)(m+1)...(e)$ **تكافئ** $(m+1)=\frac{2x-2}{(e^x-2x)}$ أي $f(x)=(m+1)$ أي $\begin{cases} y=m+1 \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة (e) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة: $y=m+1$.

من البيان نميز الحالات التالية:

1) $m+1\prec -2$ أي $m\prec -3$ المعادلة (e) **لا تقبل** حلول.

2) $m+1=-2$ أي $m=-3$ المعادلة (e) تقبل حلا مضاعف معدوم.

3) $-1\prec m+1\prec -2$ أي $-2\prec m\prec -3$ المعادلة (e) **لا تقبل** حلّين مختلفين في الإشارة.

4) $-2\prec m+1\le 0$ أي $-3\prec m\le -1$ المعادلة (e) تقبل حل وحيد موجب.

5) $0\prec m+1\prec f(\alpha)$ أي $-1\prec m\prec -1+f(\alpha)$ المعادلة (e) **لا تقبل** حلّين موجبين تماما.

6) $m+1=f(\alpha)$ أي $m=-1+f(\alpha)$ المعادلة (e) تقبل حلا مضاعف موجب تماما.

7) $m+1\succ f(\alpha)$ أي $m=-1+f(\alpha)$ المعادلة (e) **لا تقبل** حلول.

5- أ) حساب $h'(x)$ **بدلالة** $f'(x)$ **و** $f(x)$ **ثم استنتاج إشارة** $h'(x)$

لدينا: h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x)=[f(x)]^2$

ومنه $h'(x)=2f(x).f'(x)$ استعمال مشتق دالة مركبة.

من العبارة $h'(x)=2f(x).f'(x)$ نستنتج أن إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة الجداء $f(x).f'(x)$

وهي ملخصة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	|	$-$	0		|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|		0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة h.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$[f(0)]^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$[f(\alpha)]^2$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^2=(0)^2=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]^2=(-1)^2=1$

التمرين31:دورة 2011

1-دراسة تغيرات الدالة f .

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$

النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=-1$ **لأن** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=3$ **لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

اتجاه التغير

$f'(x)=0-\dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ ونلاحظ أن $f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

وجدول تغيراتها هو كمايلي

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

2- تعيّين المستقيمات المقاربة لـ (C_f).

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=-1$ عند $-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=3$ عند $+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

3-تبيّان أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطاب تعيينها.

(C_f) نقطة انعطاف ω معناه $f''(x)$ ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ ومنه : $f''(x)=\frac{4e^x(e^x+1)^2-2(e^x+1).4e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{4e^x(e^x+1)[(e^x+1)-2]}{(e^x+1)^4}=\frac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

إشارة $f''(x)$ هي حسب اشارة e^x-1 وهي كمايلي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+

$f(0)=1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $\omega(0;1)$

كتابة معادلة المماس لـ (C_f) عند نقطة انعطاف ω

معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=(1)(x-0)+1=x+1$ أي $y=x+1$

4-أ- دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=f(x)-x$

النهايات

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$ و لأن $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ و لأن $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

اتجاه التغير

$g'(x)=f'(x)-1=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ ونلاحظ أن $g'(x)\le 0$

ومنه الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$. وجدول تغيراتها هو كمايلي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	−	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

ب-تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α حيث $2{,}7\prec\alpha\prec 2{,}8$.

* لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

ولدينا: $g(2{,}7)=0{,}04$ و $g(2{,}8)=-0{,}02$ أي $g(2{,}7)\times g(2{,}8)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $2{,}7\prec\alpha\prec 2{,}8$ يحقق $g(\alpha)=0$.

4- حساب $f(-x)+f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا: $f(-x)+f(x)=3-\frac{4}{e^{-x}+1}+3-\frac{4}{e^x+1}=6-(\frac{4e^x}{e^x+1}+\frac{4}{e^x+1})=6-4=2$

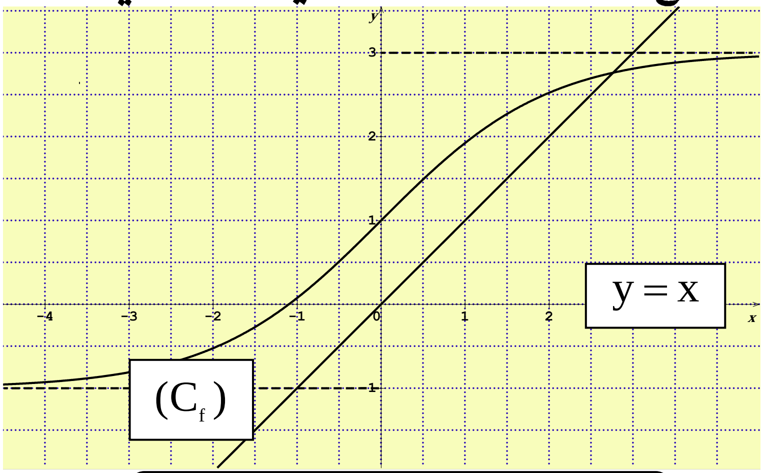
ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=2$

العبارة $f(-x)+f(x)=2$ تعني أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5- حل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

$f(x)=0$ معناه $3-\frac{4}{e^x+1}=0$ ومعناه $\frac{3e^x-1}{e^x+1}=0$ أي $3e^x-1=0$ ومنه $e^x=\frac{1}{3}$ إذن $x=-\ln 3$

التفسير الهندسي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة التي احداثياها $(-\ln 3;0)$



التمرين32:دورة 2010

1-تعيّين العددين الحقيقيين a وb

لدينا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\frac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

لدينا: $f(x)=\frac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$ تكافئ $f(x)=\frac{3x(e^x-1)-4}{3(e^x-1)}=\frac{3x(e^x-1)}{3(e^x-1)}-\frac{4}{3(e^x-1)}=x-\frac{4}{3(e^x-1)}$....(1)

ولدينا: من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ....(2) $f(x)=ax+\frac{b}{3(e^x-1)}$.

بالمطابقة بين الشكلين (1) و (2) نجد: $a=1$ و $b=-4$.

2-حساب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{4}{3(e^x-1)}=-\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{4}{3(e^x-1)}=+\frac{4}{3}$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{4}{3(e^x-1)}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{3(e^x-1)}=0$

* $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{4}{3(e^x-1)}=+\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}-\frac{4}{3(e^x-1)}=+\infty$

* $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} x-\frac{4}{3(e^x-1)}=-\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}-\frac{4}{3(e^x-1)}=-\infty$

3-تبيّان أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x)=x-\frac{4}{3(e^x-1)}$ ومنه : $f'(x)=1+\frac{12(e^x)}{9(e^x-1)^2}=1+\frac{4(e^x)}{3(e^x-1)^2}$

من العبارة $f'(x)=1+\frac{4(e^x)}{3(e^x-1)^2}$ نستنتج أن $f'(x)\succ 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

مجالي تعريفها وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

5-أ) تبيّان أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

*المستقيم $(D): y = x$ مقارب لـ (C_f) لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{3(e^x-1)}=0$$

المستقيم $(D'): y=x+\frac{4}{3}$ مقارب لـ (C_f) لأن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{4}{3}\left[\frac{1}{(e^x-1)}+1\right]=0$

*لدينا: $[f(x)-y]=-\frac{4}{3(e^x-1)}\prec 0$ معناه (C_f) **تحت** المستقيم $(D): y=x$ من أجل كل $x\succ 0$

$[f(x)-y]=-\frac{4}{3}\left[\frac{e^x}{(e^x-1)}\right]\succ 0$ معناه (C_f) **فوق** المستقيم $(D'): y=x+\frac{4}{3}$ من أجل كل $x\prec 0$.

ب) تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9\prec x_0\prec 0,91$ و $-1,66\prec x_1\prec -1,65$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$ و $f(0,9)\times f(0,91)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 محصور بين $0,9$ و $0,91$ يحقق: $f(x_0)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_-^*$ و $f(-1,66)\times f(-1,65)\prec 0$

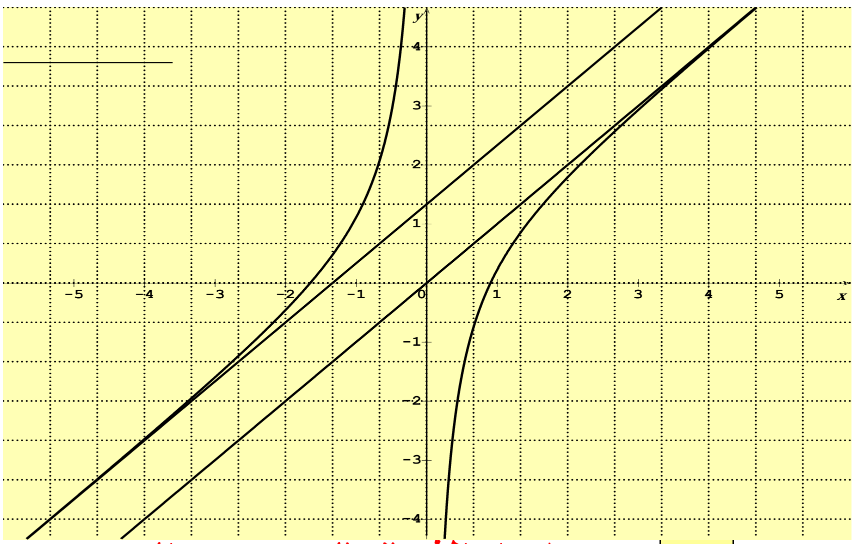
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_1 محصور بين $-1,66$ و $-1,65$ يحقق: $f(x_1)=0$

ج) حساب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ثم تفسّير النتيجة هندسيا.

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{4}{3(e^{-x}-1)}+x-\frac{4}{3(e^x-1)}=-\frac{4}{3}\left[\frac{-e^x}{(e^x-1)}+\frac{1}{(e^x-1)}\right]=\frac{4}{3}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)=\frac{4}{3}$

العلاقة $f(-x)+f(x)=\frac{4}{3}$ تعني ان النقطة التي احداثياها $(0;\frac{2}{3})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).



د) رسم (D) و (D') و (C_f).

5-المناقشة البيانية حسب قيم m

لعدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

لدينا: $f(x)=x+m$ تكافئ الجملة التالية

$$\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو

المعادلة: $y=x+m$ والذي له نفس منحى المستقيمين (D) و (D') من البيان نميز الحالات التالية:

1) إذا كانت $m \prec 0$ فإن المعادلة تقبل حل موجب تماما.

2) إذا كانت $0 \le m \le \frac{4}{3}$ فإن المعادلة لاتقبل حلول.

3) إذا كانت $m \succ \frac{4}{3}$ فإن المعادلة تقبل حل سالب تماما.

6- دراسة تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

لدينا: g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$

النهايات

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [f(x)]^2 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = +\infty$ لأن لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

اتجاه التغير

من العبارة $g'(x)=2f(x).f'(x)$ استعمال مشتق دالة مركبة.

نستنتج أن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ لأن $f'(x) \succ 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة h.

x	0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$g(x_0)$	↗	$+\infty$

التمرين33: دورة 2009

1- حساب $f(-x)+f(x)$ و الإستنتاج.

لدينا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{1+e^x}$.

ومنه: $f(-x)+f(x) = -x+\frac{2}{1+e^{-x}}+x+\frac{2}{1+e^x} = \frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{2}{1+e^x} = \frac{2(e^x+1)}{1+e^x} = 2$

من العبارة $f(-x)+f(x)=2$ نستنتج أن (C_f) يقبل النقطة التي إحداثياتها $(0;1)$ كمركز تناظر

2- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم استنتاج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

النهايات

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0) = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{2}{e^x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

اتجاه التغير

لدينا: $f(x)=x-\dfrac{4}{3(e^x-1)}$ ومنه : $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$

من العبارة $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ نستنتج أن $f'(x)\succ 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f (x)	1 $\nearrow$ $+\infty$

(C_f) يقبل النقطة التي إحداثياها $(0;1)$ كمركز تناظر وعليه جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ يكون كمايلي

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f (x)	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ملاحظة: $f'(x)\succ 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\dfrac{2}{e^x+1}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

3-تبيّان أن المستقيم $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

المستقيم $(D): y=x$ مقارب لـ (C_f) لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(e^x+1)}=0$

4-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^x+1}-2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

5-تبيّان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث: $-1{,}7\prec\alpha\prec-1{,}6$

* لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (أنظر جدول تغيرات الدالة f)

ولدينا: $f(-1{,}7)=-8{,}93\times10^{-3}$ و $f(-1{,}6)=6{,}40\times10^{-2}$ أي $f(-1{,}7)\times f(-1{,}6)\prec 0$ ومنه

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-1{,}7\prec\alpha\prec-1{,}6$ يحقق $f(\alpha)=0$.

6-تبيّان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

(C_f) يقبل نقطة انعطاف ω معناه $f''(x)$ ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ومنه: $f''(x)=\dfrac{2e^{2x}(e^x+1)^2-2(e^x+1)e^x(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^4}=\dfrac{2e^x\left[e^x(e^x+1)-(e^{2x}+1)\right]}{(e^x+1)^3}=\dfrac{2e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

إشارة $f''(x)$ هي حسب اشارة $e^x - 1$ وهي كمايلي

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

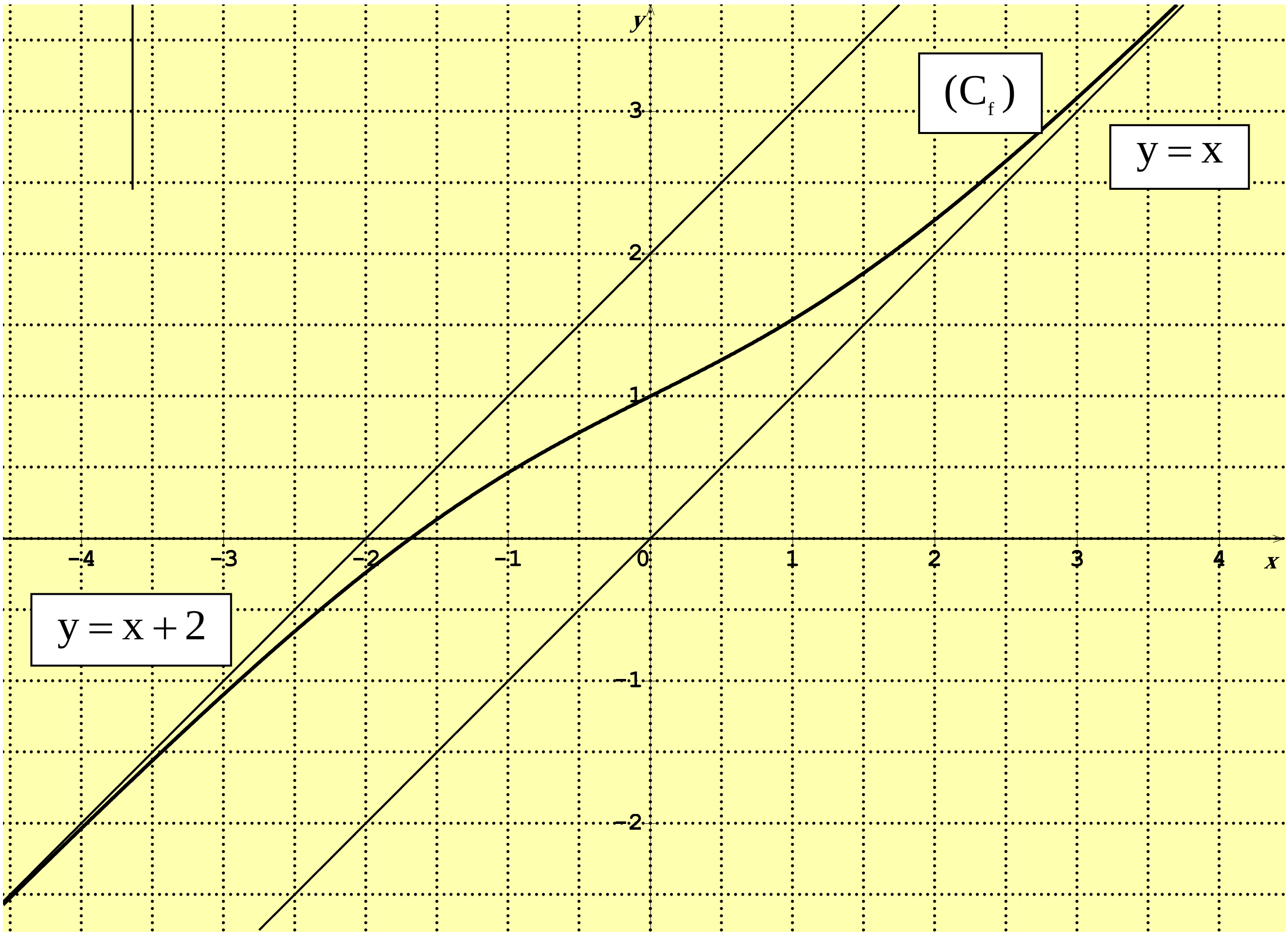
ومنه نقطة الإنعطاف هي $\omega(0;1)$ $f(0)=1$

7-تبيّان أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربا ن ثم رسم المنحنى (C_f)

لدينا: $[f(x)-y]=\dfrac{2}{(e^x+1)}\succ 0$ حيث $y=x$ ومنه $f(x)\succ x$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

ولدينا: $[f(x)-y]=\dfrac{2e^x}{e^x+1}\prec 0$ حيث $y=x+2$ ومنه $f(x)\prec x+2$ من أجل كل $x\in]-\infty;0[$

نستنتج مماسبق أن : $x\prec f(x)\prec x+2$ أي أن نقط المنحنى (C_f) تقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان اللذان معادلتيهما: $(D);y=x$ و $(D'):y=x+2$



الجـــزء الثالث: شعبة :الرياضيات

التمرين34:دورة 2019

I-1) تبيّان أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي .

ليكن و(C_k)تمثيلها البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

جميع المنحنيات (C_k)تمر من نقطتين ثابتتين معناه احداثيات هاتين النقطتين مستقلة عن k

$f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ تكافئ $y=(x+1)^2e^{-kx}$ ومعناه $(x+1)=0$ أو $x=0$ و $y=0$

أي من أجل ثنائية $(x;y)=(-1;0)$ أو $(x;y)=(0;0)$

تكون المعادلة $y=(x+1)^2e^{-kx}$ محققة من اجل كل عدد حقيقي k

وعليه جميع المنحنيات (C_k)تمر من نقطتين ثابتتين احداثياتهما $(-1;0)$ ، $(0;0)$

2) حساب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$ (حسب قيم الوسيط الحقيقي k)

نميز ثلاث حالات هي : $k>0$ ، $k=0$ و $k<0$

الحالة1: $k>0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-kx}=+\infty$

: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}=0$ لأن $\lim\limits_{t\to-\infty}(-t+1)^2e^{kt}=0$ حيث $-x=t$

الحالة2: $k=0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-kx}=e^0=1$

: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-kx}=e^0=1$

الحالة3: $k<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-kx}=+\infty$

: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=0$ لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}(-t+1)^2e^{kt}=0$ حيث $-x=t$

3-أ) حساب $f'_k(x)$ ، ثم تحديد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'_k(x)=2(x+1)e^{-kx}-ke^{-kx}(x+1)^2=k(x+1)(-x-1+\frac{2}{k})e^{-kx}$

$f'_k(x)=0$ من أجل $x_2=-1+\frac{2}{k}$ أو $x_1=-1$ لان $e^{-kx}>0$

وعليه اشارة $f'_k(x)$ هي حسب اشارة $-k(x+1)(x+1-\frac{2}{k})$ لأن $e^{-kx}>0$

نميز ثلاث حالات هي : $k>0$ ، $k=0$ و $k<0$

1) $k<0$: $f'_k(x)>0$ من أجل $x\in]x_2;x_1[$ و $f'_k(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;x_2[\cup]x_1;+\infty[$

2) $k=0$: $f'_k(x)<0$ من أجل $x\in]-\infty;x_1[$ و $f'_k(x)>0$ من أجل $x\in]x_1;+\infty[$

3) $k>0$: $f'_k(x)<0$ من أجل $x\in]x_1;x_2[$ و $f'_k(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

من أجل k عدد حقيقي موجب تماما لدينا:

$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=0$

$f'_k(x)<0$ من أجل $x\in]x_1;x_2[$ و $f'_k(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f_k يكون كما يلي:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

4-المناقشة وحسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1}).

لدراسة الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1})ندرس اشارة الفرق: $f_{k+1}(x)-f_k(x)$

لدينا: $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx-x}-(x+1)^2e^{-kx}=f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}(e^{-x}-1)$

ومنه اشارة الفرق هي حسب اشارة $(e^{-x}-1)$ لأن $(x+1)^2e^{-kx}\geq 0$

1) من أجل $x>0$ يكون $(e^{-x}-1)<0$ ومعناه $f_{k+1}(x)-f_k(x)\leq 0$ ويكون (C_k) تحت (C_{k+1})

2) من أجل $x<0$ يكون $(e^{-x}-1)>0$ ومعناه $f_{k+1}(x)-f_k(x)\geq 0$ ويكون (C_k) فوق (C_{k+1})

3) من أجل $x=0$ يكون $(e^{-x}-1)=0$ ومعناه $f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$ ويكون (C_k) يقطع (C_{k+1})

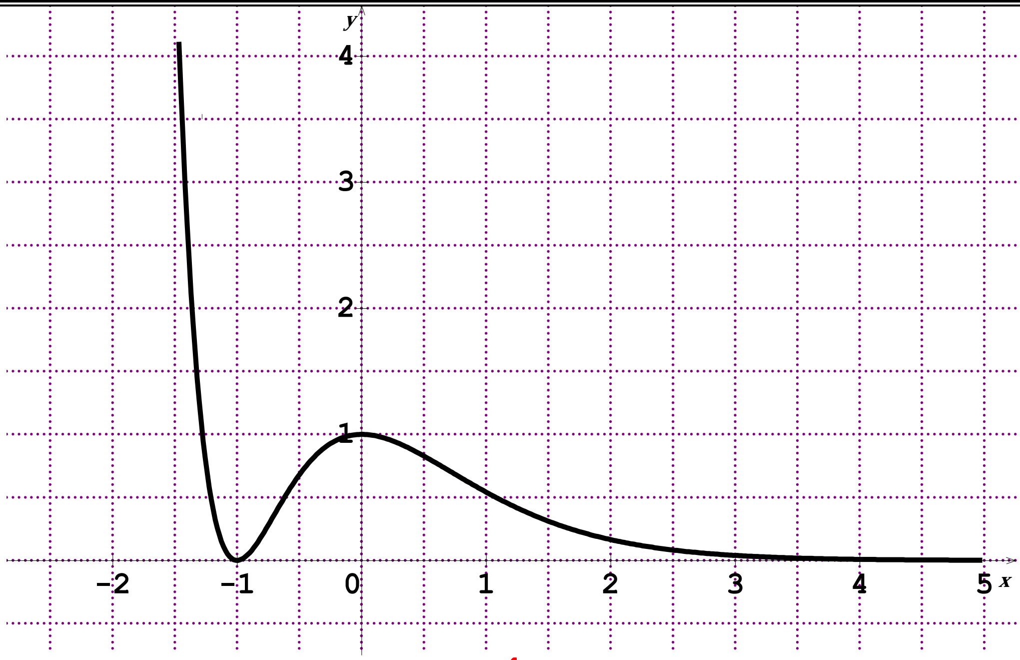
II- 1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f (من أجل $k=2$)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$ و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

باستعمال جدول التغيرات الوارد في الجواب 3-ب) نضع $k=2$ نجد الجول التالي:

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-\frac{3}{2})$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0

رسم المنحنى (C_f)



2-أ) بيّن ان المعادلة $f(x)=1$ تقبل حليّن في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]-1;-\frac{3}{2}\right[$ و $f(-1,28)=1,01>1$ و $f(-1,27)=0,91<1$

وعليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=1$ حيث $-1,28<\alpha<-1,27$

ب) تعيبّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ تكافئ المعادلة : $f(x)=f(m)$ لأن:

$f(x)=f(m)$ تكافئ $(x+1)^2e^{-2x}=(m+1)^2e^{-2m}$

وتكافئ $|x+1|e^{-x}=|m+1|e^{-m}$ وتكافئ $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$

للمعادلة $f(x)=f(m)$ لها حلا وحيدا معناه المستقيم ذو المعادلة: $y=f(m)$ يقطع المنحنى (C_f)

في نقطة وحيدة فاصلتها m حيث $m\in\left]-\frac{3}{2};\alpha\right[$

التمرين35:دورة 2018

I-1) تبيّان أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

لدينا: $g'(x)=(2x+1)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

لأن $(x+1)(2x^2+1)=2x^3+x^2+1$ بنشر العبارة $(x+1)(2x^2+1)$

2 -أ) استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

من عبارة $g'(x)$ نستنتج ان اشارتها موجبة تماما لأن

لأن كلا من: $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ و $(2x^2+1) > 0$ و $x^2 > 0$ و $(x+1)$

وعليه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}9 < \alpha < 1$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $g(1) = 3e^{-1} - 1 > 0$ و $g(1{,}9) = -$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1{,}9 < \alpha < 1$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1)-أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (1+x) = 1$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1.e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها .

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ لان المقام موجب تماما

وعليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ ومتزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$

وجدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2-تبيّان أن: ($\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)$)

($\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)$) حالة عدم التعيين

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-\lim_{t\to0}(\frac{e^t-1}{t})=-1$ لأن $\lim_{t\to0}(\frac{e^t-1}{t})=1$ نهاية شهيرة

استنتاج ان المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.

المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$معناه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}\left[x(e^{-\frac{1}{x}}-x)\right]=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ من التبيان السابق.

3-أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ ودراسة اتجاه تغير الدالة h

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

* $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$

** من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن:

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}(-1+e^{-\frac{1}{x}})$$

إشارة $h'(x)<0$ لأن $-1+e^{-\frac{1}{x}}<0$ و لأن $\frac{1}{x^2}>0$

توضيح: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$]0;+\infty[$ فإن:

$-\frac{1}{x}<0$ ومنه $e^{-\frac{1}{x}}<1$ لأن الدالة الأسية متزايدة تماما وتعني $-1+e^{-\frac{1}{x}}<0$

ومنه الدالة h متناقصة تماما على مجال تعريفها.

استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

من الجوابين السابقين :

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ و h متناقصة تماما على مجال تعريفها نستنتج أن $h(x)>0$

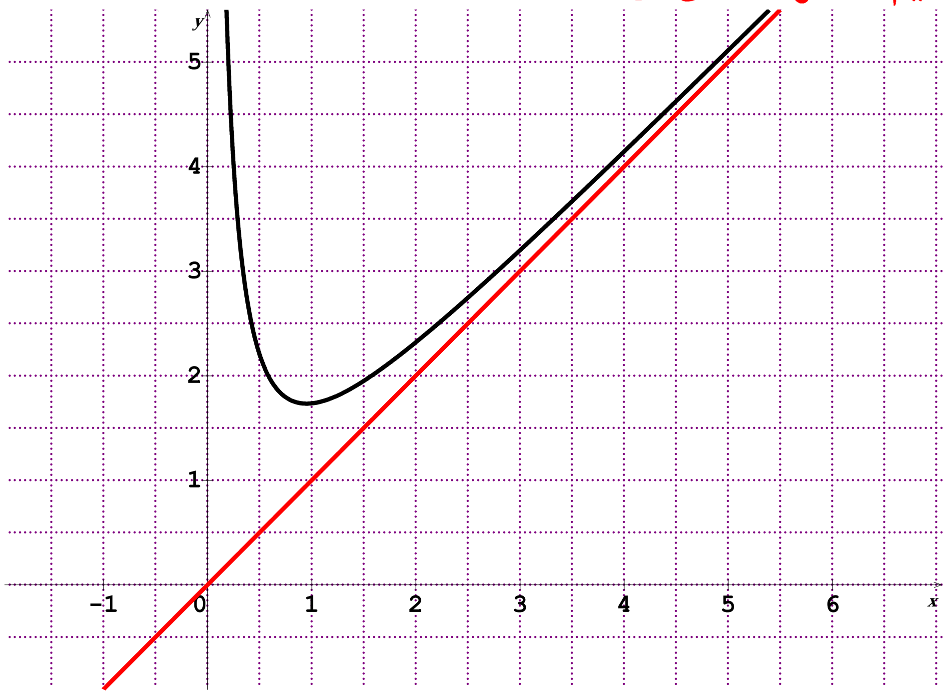
ب) التحقق أن: $f(x)-x=(1+x)h(x)$.

لدينا: $f(x)-x=\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}-x=(x+1)(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}})=(x+1)h(x)$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f)بالنسبة للمستقيم(Δ)ينبغي دراسة اشارة الفرق $f(x)-x$

ولدينا: $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ومنه اشارة الفرق موجبة تماما $(x+1)h(x)>0$ لأن $x>0$
وعليه نقول ان المنحنى (C_f) وفوق المستقيم (Δ).
ب-رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)



التمرين36:دورة 2017

1-أ)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ استنتاج وجود مستقيم مقارب لـ(C_f) وتعيين معادلة له
الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=-\infty\times 0$ حالة عدم التعيين وفي ما يلي نقوم بإزالتها كما يلي
نضع: $t=-x$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to-\infty}(t^3)e^{t+1}=0$ علما أن $\lim\limits_{t\to-\infty}(t^3)e^{t+1}=0$ نهاية شهيرة
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ نستنتج أنه يوجد مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)معادلته $y=0$ في جوار $+\infty$
ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$.
لدينا : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$
ومنه $f'(x)=(-x^3+2x^2)'e^{-x+1}+(-x^3+2x^2)(e^{-x+1})'=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-e^{-x+1}(-x^3+2x^2)$
$f'(x)=\left[(-3x^2+4x)-(-x^3+2x^2)\right]e^{-x+1}=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$
استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها
اشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x(x^2-5x+4)$ لأن $e^{-x+1}\succ 0$
$x(x^2-5x+4)=0$ معناه $x=0$ أو $x=1$ أو $x=4$
إشارة $x(x^2-5x+4)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	0

2) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $a=2$

ومنه : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=-4e^{-1}(x-2)+0$ وعليه: $y=-4e^{-1}(x-2)$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة h ثم استنتاج اشارة $h(x)$

لدينا: h الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ومنه $h'(x)=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}=(-x^2+2x)e^{-x+2}$

اشارة $h'(x)$ هي حسب إشارة $(-x^2+2x)$ لأن $e^{-x+1} \succ 0$

$(-x^2+2x)=0$ معناه $x=0$ أو $x=2$ وإشارة $(-x^2+2x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	

لدينا: $h(2)=0$ أي أن الدالة h تقبل 0 كقيمة حدّية عظمى وعليه يكون $h(x)\le 0$

تحديد وضعية المنحنى (C_f) النسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

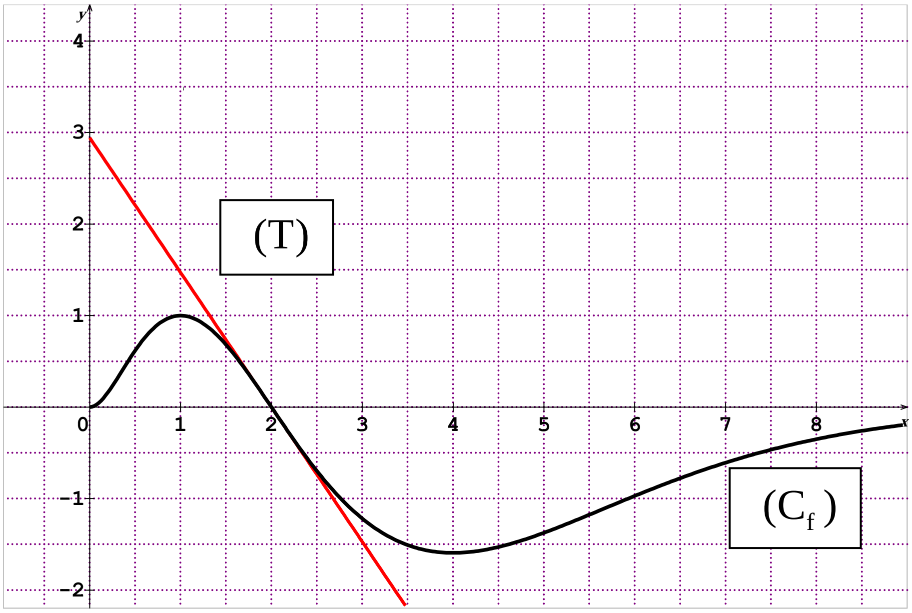
لتحديد وضعية (C_f) النسبة إلى (T) ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y$ حيث $y=-4e^{-1}(x-2)$

لدينا: $f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}-4e^{-1}(2-x)=(2-x)(x^2e^{-x+2}-4)=(2-x)h(x)$

الجدول التالي يوضح ضعية (C_f) النسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
$(2-x)h(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

3)رسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.



5) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (E).

لدينا: $f(x)=m(x-2)....(E)$ ومنه (E) تكافئ الجملة التالية $\begin{cases} y=m(x-2).....(1) \\ y=f(x).......(2) \end{cases}$

المعادلة (1) تعني ان جميع المستقيمات (Δ_m) ذات المعادلة $y=m(x-2)$ تشمل نقطة وحيدة احداثييها $(2;0)$ لانه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة (1) محققة من أجل $(x;y)=(2;0)$

وعليه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة التي احداثييها $(2;0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m\le -4e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيد أو $m\succ 0$ المعادلة تقبل حلا وحيد .

2) $-4e^{-1}\prec m\prec 0$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول. 3) $m=0$ المعادلة تقبل حلين

6) تشكيل جدول تغيرات الدالة g.

لدينا : g الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

* <u>اتجاه تغير الدالة g</u>: لدينا: $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$g'(x)=0$ معناه $f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ومعناه $x=1$ أو $x=\frac{1}{4}$ وإشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$

وعليه اتجاه تغير g يكون كمايلي:

1)الدالة g تكون متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[\cup\left]0;\frac{1}{4}\right[$ لأن: $f'(x)>0$

2) الدالة g تكون متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{4};1\right[$ لأن: $f'(x)<0$

*النهايات: $\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = \lim_{x \to 0^{>}} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ لأن $\lim_{x \to 0^{>}} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-32e^{-3}$	↗	1	↘	0

التمرين 37 :دورة 2017 الاستثنائية

I- 1) حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2.e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2.e^{-x} = \lim_{t \to -\infty} t^2.e^{t} = 0$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)\left[2-(x+1)\right] = -(x^2-1)e^{-x}$

من العبارة $f'(x) = -(x^2-1)e^{-x}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $-(x^2-1)$

لدينا: $-(x^2-1) = 0$ معناه $x = -1$ أو $x = 1$ وعليه اشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0

3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف و تعيين إحداثييهما.

(C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معناه الدالة المشتقة f'' تنعدم عند قيمتين وتغير اشارتها عندهما

لدينا: $f'(x) = -(x^2-1)e^{-x}$ ومنه $f''(x) = -\left[(2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2-1)\right] = e^{-x}(x^2-2x-1)$

$f''(x) = 0$ معناه $(x^2-2x-1) = 0$ ومعناه $x_1 = 1-\sqrt{2}$ أو $x_2 = 1+\sqrt{2}$

وإشارة $f''(x)$ هي حسب (x^2-2x-1) وهي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

مماسبق نستنتج أن (C_f)يقبل نقطتي إنعطاف إحداثييهما: $(x_1;y_1)$ و $(x_2;y_2)$

حيث: $y_1=(2-\sqrt{2})^2e^{\sqrt{2}-1}$ و $y_2=(2+\sqrt{2})^2e^{-\sqrt{2}-1}$

حساب $f(-2)$ ورسم(C_f)

لدينا: $f(-2)=e^2$ ونلاحظ $f(0)=1$ رسم (C_f) في آخر الحل

II-1) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω وتعيين إحداثييها.

لدينا: الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$ و(C_m)تمثيلها البياني

جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(x;y)$ معناه توجد ثنائية $(x;y)$مستقلة عن m

نضع: $y=f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}....(e)$

المعدلة (e)تكافئ $mxe^{-x}+(x^2+1-y)=0$ وتكافئ $x=0$ و $1-y=0$ ($y=1$)

من أجل الثنائية $(x;y)=(0;1)$ تكون المعادلة (e)محققة من أجل كل عدد حقيقي m

وعليه جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(0;1)$.

2) دراسة إتجاه تغير f_m .

لدينا: $f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$

ومنه: $f'_m(x)=(2x+m)e^{-x}-(x^2+mx+1)e^{-x}=e^{-x}\left[-x^2+(2-m)x+m-1\right]$

$f'_m(x)=0$ معناه $\left[-x^2+(2-m)x+m-1\right]=0...(*)$

لحل المعادلة $(*)$نستعمل المميز: $\Delta=b^2-4ac=m^2$

ومنه المعادلة $(*)$ تقبل حلين مهما يكن الوسيط الحقيقي m هما: 1 و $1-m$

إشارة $f'_m(x)$ هي حسب إشارة العبارة $-x^2+(2-m)x+m-1$

1)من أجل $m=0$ يكون لدينا $f'_0(x)=-(x-1)^2e^{-x}\leq 0$ أي الدالة f_m متناقصة

2) من أجل $m\neq 0$ المعادلة $(*)$ تقبل حلين مختلفين

الحالة1: $m\prec 0$ يكون لدينا $f'_m(x)\prec 0$ من اجل $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1-m;+\infty\right[$

ويكون لدينا $f'_m(x)\succ 0$ من اجل $x\in\left]1;1-m\right[$

وعليه f_m متناقصة تماما على $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1-m;+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على$\left]1;1-m\right[$

الحالة2: $m\succ 0$ يكون لدينا $f'_m(x)\prec 0$ من اجل $x\in\left]-\infty;1-m\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

ويكون لدينا $f'_m(x)\succ 0$ من اجل $x\in\left]1-m;1\right[$

وعليه f_m متناقصة تماما على$\left]-\infty;1-m\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على$\left]1-m;1\right[$

استنتاج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين و تعيينهما

الدالة f_mتقبل قيمتين حديتين معناه المعادلة $f'_m(x)=0$ تقبل حلين متمايزين أي $\Delta\succ 0$

$\Delta \succ 0$ معناه $m \neq 0$ ومعناه $x_1 = 1$ أو $x_2 = 1-m$

ومنه f_m تقبل قيمتين حديتين احداثياهما: $(1;(m+2)e^{-1})$ و $(1-m;(-m+2)e^{m-1})$

3) اثبات أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى و تعيينه.

لدينا : M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1-m$

من أجل $x_m = 1-m$ فإن $y_m = f(1-m) = (-m+2)e^{m-1}$

ومنه $M_m(x_m;y_m)$ حيث $y_m = (-m+2)e^{m-1}$

أي M_m تنتمي إلى منحنى ذو المعادلة $y = (-x+2)e^{x-1}$

4) دراسة حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)

لدراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) ندرس إشارة الفرق: $f_m(x) - f(x)$

لدينا: $f_m(x) - f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (m-2)xe^{-x}$

$f_m(x) - f(x) = 0$ معناه $x = 0$ أي (C) و (C_m) متقاطعان في النقطة $\omega(0;1)$

لدراسة إشارة الفرق نميز حالتن:

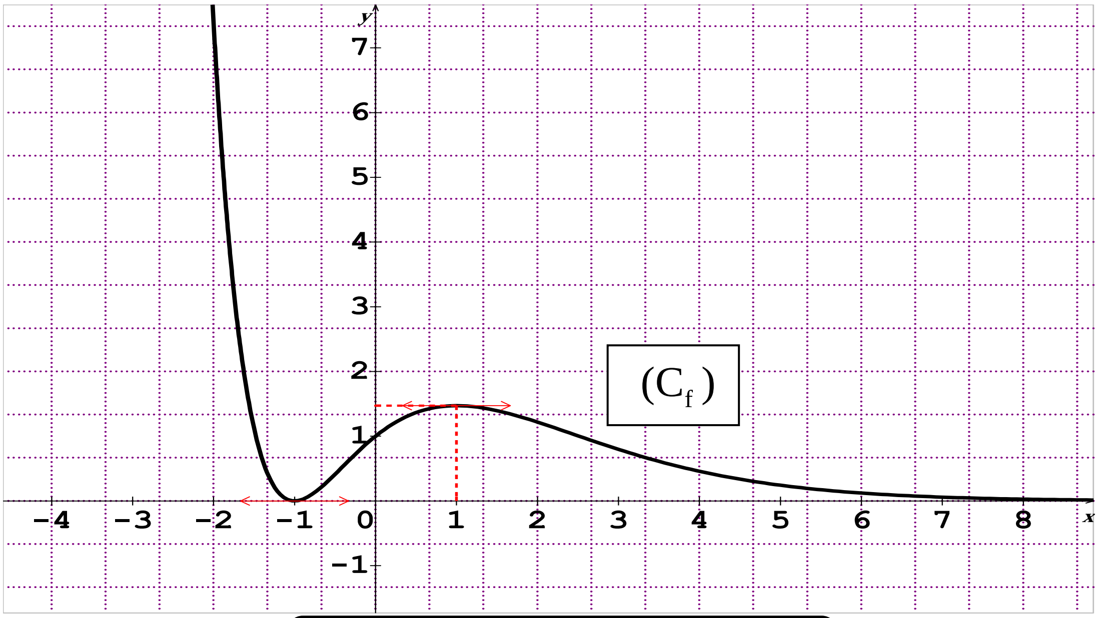
الحالة1: $m \prec 2$ ويكون الفرق $f_m(x) - f(x) = (m-2)xe^{-x}$ حسب إشارة x

من أجل $x \prec 0$ يكون (C) تحت (C_m) و من أجل $x \succ 0$ يكون (C) فوق (C_m)

الحالة2: $m \succ 2$ يكون الفرق $f_m(x) - f(x) = (m-2)xe^{-x}$ حسب إشارة x

من أجل $x \prec 0$ يكون (C) فوق (C_m) و من أجل $x \succ 0$ يكون (C) تحت (C_m)

إنشاء المنحنى (C_f)



التمرين 38 :دورة جوان2016

I-1-أ) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

لدينا: الدالة φ معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$

ومنه: $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2)e^{-x+1} - 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2)e^{-x+1} - 1 = -1$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة φ و تشكيل جدول تغيراتها

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = (2x-1)e^{-x+1} - (x^2-x+1)(e^{-x+1}) = (-x^2+3x-2)e^{-x+1}$

اشارة $\varphi'(x)$ هي حسب إشارة $(-x^2+3x-2)$ لأن $e^{-x+1} \succ 0$

$(-x^2+3x-2) = 0$ معناه $x=1$ أو $x=2$ وإشارة $(-x^2+3x-2)$ هي حسب الجول التالي:

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$(-x^2+3x-2)$	-	0	+	0	-	
اتجاه تغير الدالة φ	متناقصةتماما		متزايدةتماما		متناقصةتماما	

2)تبيان أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ($\alpha \neq 1$) والتحقق أن $2,79 \prec \alpha \prec 2,80$

الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على $]2;+\infty[$ و: $\varphi(2,79) = 0.0007$ و $\varphi(2,80) = -0.001$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $\varphi(\alpha) = 0$

3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلين هما 1 و α واشارة $\varphi(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty;\alpha[$ فإن: $\varphi(x) \succ 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $\varphi(x) \prec 0$

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1} = \lim\limits_{y\to-\infty} -ye^{y+1} = 0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = 2.e^{-x+1} - (2x-1)e^{-x+1} = e^{-x+1}(-2x+3)$ واشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $(-2x+3)$

لأن $e^{-x+1} \succ 0$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$

2) تبيان أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا معناه $f'(1) = g'(1)$

لدينا: $f'(x) = e^{-x+1}(-2x+3)$ ومنه $f'(1) = e^{-1+1}(-2.1+3) = 1$

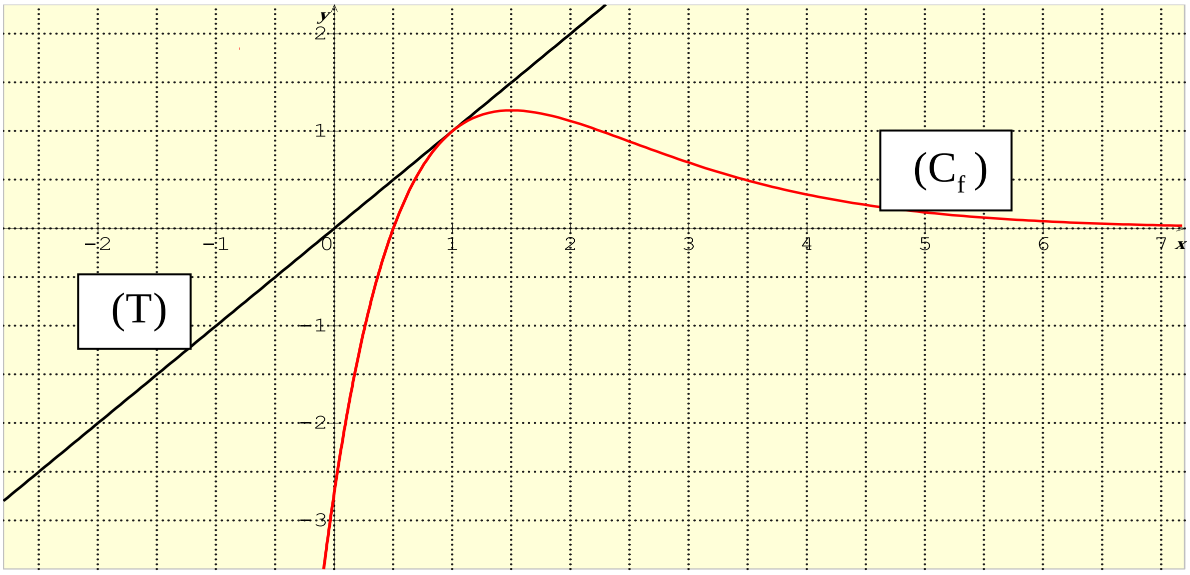
لدينا: $\dfrac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} = g'(x)$ ومنه $g'(1) = 1$

كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T)

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ومنه : $y = 1(x-1) + f(1)$ وعليه: $y = x$.

3)رسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f)



4-أ) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

$$f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}=\frac{(2x-1)(x^2-x+1)e^{-x+1}-1)}{x^2-x+1}=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$$

ب)دراسة اشارة الفرق $f(x)-g(x)$ واستنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

اشارة الفرق $f(x)-g(x)$ هي حسب اشارة $(2x-1)\varphi(x)$ لأن $x^2-x+1\succ 0$

و الجدول التالي يلخص اشارة الفرق وكذا الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
2x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) تحت (C_g)	

التمرين 39 :دورة جوان 2015

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)$ $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ و المعرفة على $]-\infty;0[$ و $f(0)=0$

f مستمرة عند 0 من اليسار معناه $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}f(x)=f(0)=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=-1\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}e^{\frac{1}{x}}=-1.0=0$.

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 من اليسار.

2)حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا.

لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} (1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$

نفرض أن: $u = \frac{1}{x}$ لدينا: $x \xrightarrow{<} 0$ وعليه $u \to -\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{y \to -\infty}(1-u)e^{u} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^{u} - u.e^{u} = 0$ لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} u.e^{u} = 0$ نهاية شهيرة

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ معناه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليسار أي المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 يوزي حامل محور الفواصل.

3-أ) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty}(x-1).e^{0} = -\infty$$

ب)دراسة اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ و المعرفة على $]-\infty;0[$

ومنه: $f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} + (x-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left[1-\frac{(x-1)}{x^2}\right] = e^{\frac{1}{x}}\left[\frac{(x^2-x+1)}{x^2}\right]$

$f'(x) \succ 0$ لأن: $e^{\frac{1}{x}} \succ 0$ و $\frac{(x^2-x+1)}{x^2} \succ 0$ لأن $x^2-x+1 \succ 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها.وعليه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$

4-أ)تبيان أن: $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-x] = 0$

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-x]$ حالة عدم التعيين.

نفرض أن : $t = \frac{1}{x}$ حيث: $x \to -\infty$ و $t \xrightarrow{<} 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{t \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{e^{t}-1}{t-1} - e^{t}\right] = \lim\limits_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^{t}-1}{t-1} - 1 = 0$ لأن $\lim\limits_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^{t}-1}{t-1} = 1$ نهاية شهيرة

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

من الجواب السابق لدينا: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ و $y=x$ معادلة له.

5)- أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

لدينا: g معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كمايلي: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=1$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

ب) دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: g معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كمايلي: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

ومنه: $g'(x)=\frac{f'(x).x-1.f(x)}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}\left[\frac{(x^2-x+1)}{x}\right]-(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

$g'(x)\prec 0$ لأن $x^3\prec 0$ و $e^{\frac{1}{x}}\succ 0$.

ومنه الدالة g متناقصة تماما على مجال تعريفها. وعليه جدول تغيرات الدالة g كمايلي:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow 0$

ملاحظة: $\lim_{x\xrightarrow{<}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=0$ من الجواب 2).

6)- أ) تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ ، $f(x)\succ x$.

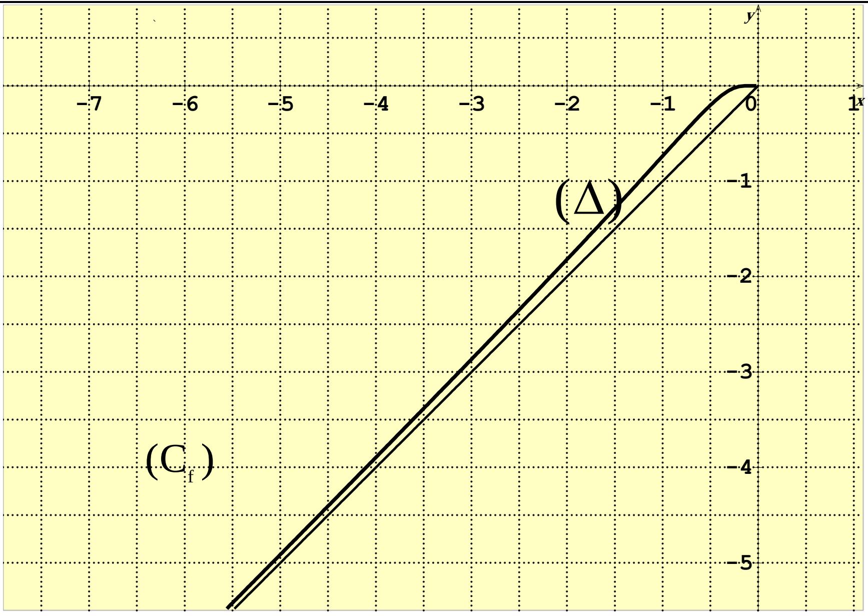
من الجواب السابق لدينا: $0\prec g(x)\prec 1$ أنظر جدول تغيرات الدالة g

ومنه: $0\prec\frac{f(x)}{x}\prec 1$ أي $x\prec f(x)\prec 0$ لأن x سالب تماما. وعليه $f(x)\succ x$

ب) استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

من الجواب السابق لدينا: $f(x)\succ x$ أي $f(x)-x\succ 0$ وعليه يكون (C_f) فوق المستقيم (Δ).

جـ) إنشاء المنحنى (C_f)



8)-أ)حساب $h'_m(x)$.

لدينا h_m دالة معرفة على المجال $]-\infty;0[$ حيث: $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$

لدينا: $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$ ومنه $h'_m(x)=e^{\frac{1}{x}}+x(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}-x=\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}-mx}{x}$

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$

$h'_m(x)=0$ معناه $(x-1)e^{\frac{1}{x}}=mx$ ومنه $mx=f(x)$ والتي تكافئ $\begin{cases} y=mx \\ y=f(x) \end{cases}$

باستعمال المنحنى (C_f) نستنتج أن حلول المعادلة $h'_m(x)=0$ أي $mx=f(x)$

هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم الدوار الذي معادلته $y=mx$

من البيان نميز الحالات التالية:

1) $m\in]0;1[$ المعادلة $h'_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;0[$

2) $m\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ المعادلة $h'_m(x)=0$ لاتقبل حلولا .

التمرين 40 :دورة جوان 2014

I) 1-دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا:الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^x-1$.

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2e^x-xe^x-1\right]=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

اتجاه التغير:

حساب المشتق ودراسة اشارته

لدينا: $g'(x)=(-1+2-x)e^x=(1-x)e^x$.

اشارة $g'(x)=(1-x)e^x$ هي نفس اشارة $1-x$

لأن $e^x\succ0$ وعليه التغيرات يكون كما يلي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

2-تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β وحيث: $-1,2 \prec \alpha \prec -1,1$ وّ $1,8 \prec \beta \prec 1,9$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ و $g(1.8)\times g(1.9)=(0.21)(-0.33)<0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة β تحقق: $g(\beta)=0$

* الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;1[$ و $g(-1.2)\times g(-1.1)=(-0.036)(0.032)<0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$

3- استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما β و α واشارة $\varphi(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II-1-حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وتفسير النتيجتين هندسيا.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{(e^x-1)}{(e^x-x)}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}=1$

• (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين $y=0$ و $y=1$.

2) تبيّان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتاج اتجاه تغير f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

من العبارة $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ نستنتج أن إشارة الدالة المشتقة f' تتبع إشارة $g(x)$.

• جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

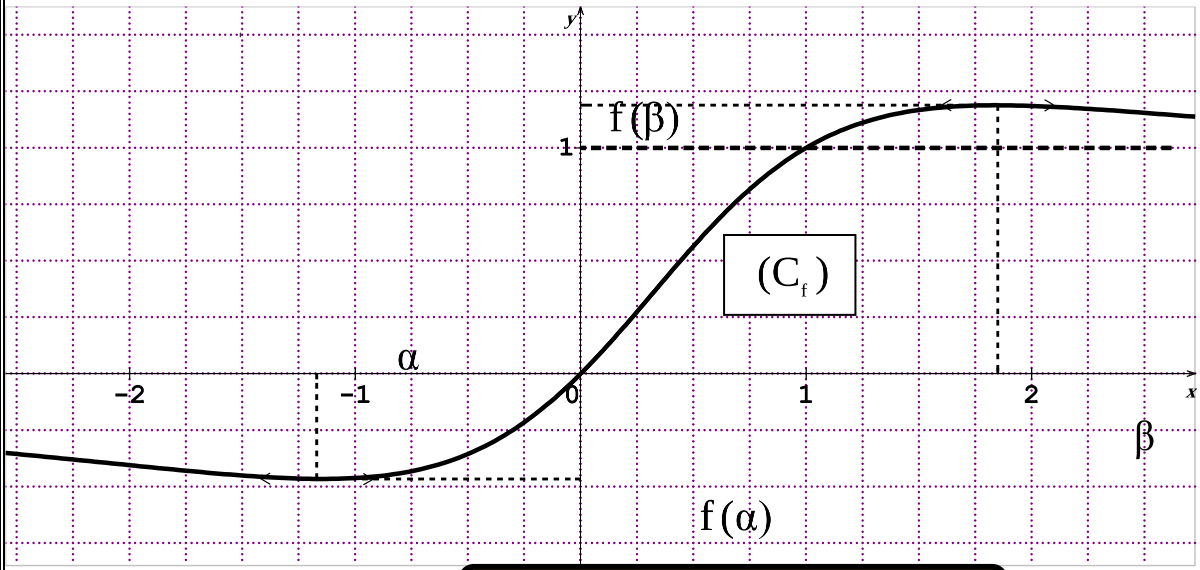
لدينا: $g(\alpha)=0$ ومنه $e^\alpha=\dfrac{1}{2-\alpha}$ وعليه $f(\alpha)=\dfrac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2}=\dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

$-1,2\prec\alpha\prec-1,1$ ومنه $-2,2\prec\alpha-1\prec-2,1$ ومنه $\dfrac{1}{-2,1}\prec\dfrac{1}{\alpha-1}\prec\dfrac{1}{-1,1}$ أي $-0.48<f(\alpha)<-0.45$

$1,8\prec\beta\prec1,9$ ومنه $0,8\prec\beta-1\prec0,9$ ومنه $\dfrac{1}{0,8}\prec\dfrac{1}{\beta-1}\prec\dfrac{1}{0,9}$ أي $1.11<f(\beta)<1.25$

4) حساب $f(1)$ ، ثم رسم المنحنى (C_f).

$f(1)=1$



التمرين 41:دورة جوان2013

I-1-أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2e^{-x}\right]=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{e^x}\right]=0$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

حساب المشتق ودراسة اشارته

$g'(x)=(2x)e^{-x}-(x^2-1)e^{-x}=(-x^2+2x+1)e^{-x}$.

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

اشارة $g'(x)$ من اشارة $(-x^2+2x+1)$ لأن $e^{-x}\succ 0$

$(-x^2+2x+1)=0$ معناه $x_1=1+\sqrt{2}$ أو $x_2=1-\sqrt{2}$ وهي حسب الجدول اعلاه

جدول تغيرات g يكون كمايلي

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	1

2-أ-تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلّين في** $\mathbb{R}$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;x_2[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $g(x_2)=-0,25$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$

* الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]x_2;x_1[$ و $g(x_2)=-0,25$ و $g(x_1)=1,43$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة β تحقق: $g(\beta)=0$

التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8\prec\alpha\prec-0,7$.

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا معدوما لأن: $g(0)=0$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8\prec\alpha\prec-0,7$ لأن: $g(-0,8)\times g(-0,7)<0$

ب- استنتاج اشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x.

من الجواب السابق نستنتج ان اشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;0[$ فإن: $g(x)\prec 0$

II -1 -أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{e^x}\right]=0$

ب-تبيّان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ و $y=x$ معادلة له.

جـ-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا: $f(x)-x\prec 0$ لأن $[f(x)-x]=-(x+1)^2e^{-x}\prec 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ).

2-أ-تبيّان أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.

$f'(x)=1-2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=1+(x^2-1)e^{-x}=g(x)$

ب-تشكّيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

من العبارة $f'(x)=g(x)$ نستنتج أن اشارة $f'(x)$ تتبع اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ-تبيّان أن (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجيه كل منهما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

(C_f) يقبل مماسين ، معمل توجيه كل منهما يساوي 1 معناه المعادلة $f'(a)=1$ تقبل حليّن متمايزين

$f'(a)=1$ تكافئ $g(a)=0$ وتكافئ $(a^2-1)e^{-a}=0$ أي $a=1$ أو $a=-1$ لأن $e^{-a}\succ 0$

كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $a=1$

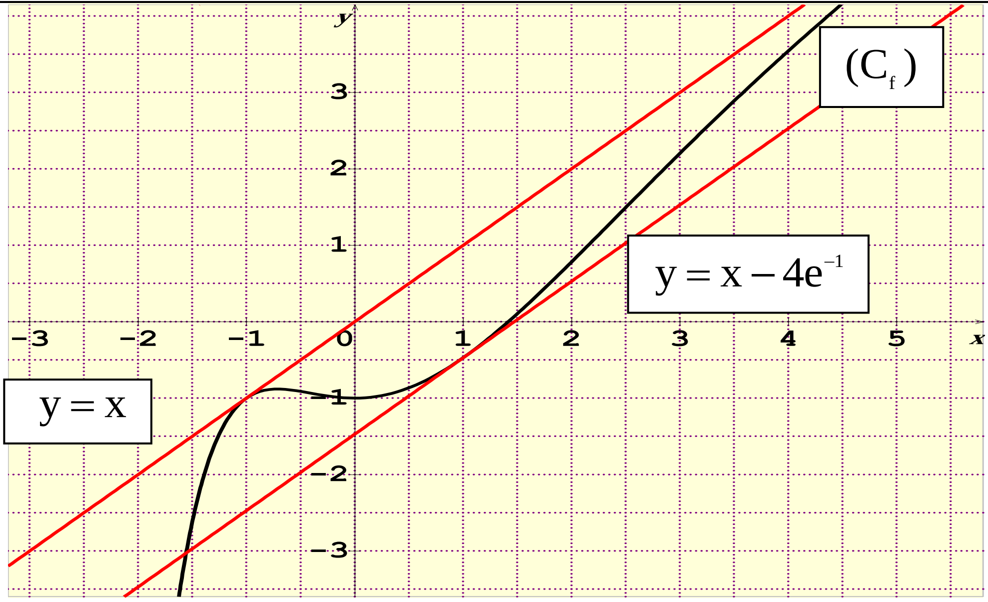
المماس له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه : $y=1(x-1)+f(1)$ وعليه: $y=x-4e^{-1}$.

كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $a=-1$

المماس له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه : $y=1(x+1)+f(-1)$ وعليه: $y=x$.



ج-المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $(x+1)^2+me^x=0$

المعادلة: $(x+1)^2+me^x=0$ تكافئ $m=(x+1)^2e^{-x}$ وتكافئ $x+m=f(x)$ أي $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو المعادلة: $y=x+m$ والذي له نفس المنحى مع حامل المماسين والمستقيم (Δ) ومن البيان نميز الحالات التالية :

1) إذا كانت $m \prec -4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما.

2) إذا كانت $m=-4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين احدهما سالب وآخر مضاعف موجب

3) إذا كانت $-4e^{-1} \prec m \prec -1$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب تماما.

4) إذا كانت $m=-1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الأشارة وحل معدوم.

5) إذا كانت $-1 \prec m \prec 0$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب تماما.

6) إذا كانت $m=0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب.

7) إذا كانت $m \succ 0$ فإن المعادلة لاتقبل حلول .

التمرين 42 :دورة جوان2012

I -1) دراسة تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2-xe^x$

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2-\left[xe^x\right]=2$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\left[xe^x\right]=0$ نهاية شهيرة و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

اتجاه التغير: حساب المشتق ودراسة اشارته

$g'(x)=(-1)e^x-(x)e^x=-(1+x)e^x$ اشارة

$g'(x)=-(1+x)e^x$ هي نفس اشارة $-(1+x)$

لأن $e^x \succ 0$ والموضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	2	↗	$g(-1)$	↘	$-\infty$

جدول تغيرات g يكون كمايلي

2-تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاوحيدا α حيث $0,8 \prec \alpha \prec 0,9$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-1;+\infty[$ و $g(0.8)\times g(0.9)=(0.21)(-0.21)<0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$

3) تعين حسب قيم x ، اشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج ان اشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

1-II)تبيّان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثم تفسّير النتيجة بيانيا.

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{-x}+2e^{-x}}{1+2e^{-x}}=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ معناه (C_f) يقبل مقارب يوازي حامل محور الفواصل و $y=0$ معادلة له.

2)أ-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{e^x+2}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2)=2$

ب-تبيّان أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-xe^x}{e^x+2}=0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ') عند $-\infty$ و $y=x+1$ معادلة له

3) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

* $[f(x)-x]=\dfrac{2-xe^x}{e^x+2}=\dfrac{g(x)}{e^x+2}$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة $g(x)$ الموضحة في جـ3) ووضعية لـ (C_f) بالنسبة (Δ) تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

* $[f(x)-(x+1)]=\dfrac{-xe^x}{e^x+2}$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة $-x$ ووضعية لـ (C_f) بالنسبة (Δ') تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	−	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

4)أ-تبيّان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}=\frac{2(2-xe^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

من عبارة $f'(x)$ نستنتج ان اشارته هي حسب اشارة $g(x)$ والموضحة في جـ3)

ب-تبيّان أن $f(\alpha)=\alpha$، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	0

* لدينا: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}$ ولدينا أيضا:

$g(\alpha)=2-\alpha e^\alpha=0$ من الجواب 2)

أي $e^\alpha=\dfrac{2}{\alpha}$ ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha+2}{\dfrac{2}{\alpha}+2}=\dfrac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+1)}=\alpha$

6)المناقشة البيانية لعدد حلول المعلدلة $f(x)=f(m)$.

المعادلة: $f(x)=f(m)$ تكافئ الجملة التالية $\begin{cases}y=f(m)\\y=f(x)\end{cases}$

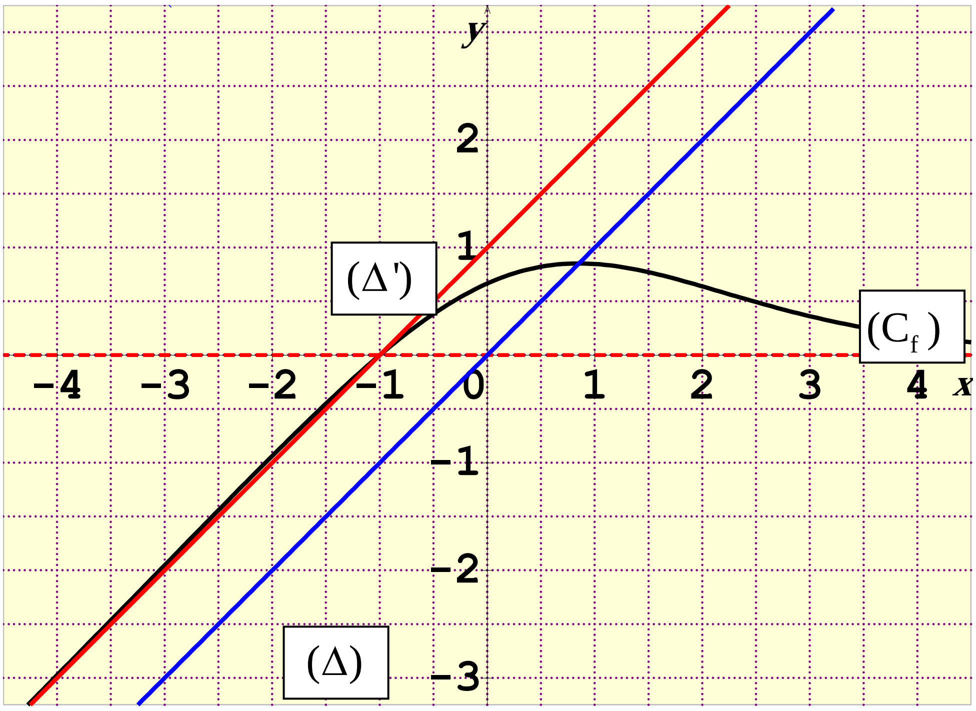
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو المعادلة: $y=f(m)$ والذي له نفس المنحى مع حامل الفواصل من البيان نميز الحلات التالية :

1)إذا كانت $m\in]-\infty;-1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

2)إذا كانت $m\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين

3)إذا كانت $m=\alpha$ فإن المعادلة تقبل مضاعف.

5) رسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .



التمرين 43 :دورة جوان2010

I- 1) دراسة تغيرات الدالة g.

gالدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(3-x)e^{x}-3$

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)e^{x}-3=-3$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{x}\right]=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

اتجاه التغير:

حساب المشتق ودراسة اشارته

لدينا: $g'(x)=(-1)e^{x}+(3-x)e^{x}=(2-x)e^{x}$.

اشارة $g'(x)=(2-x)e^{x}$ هي نفس اشارة $(2-x)$

لأن $e^{x}\succ 0$ والموضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	

جدول تغيرات g يكون كمايلي

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	-3	↗	$g(2)$	↘	$-\infty$

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in\left]2{,}82\,;2{,}83\right[$

* المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا معدوما لأن: $g(0)=0$

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]2;+\infty[$ و $g(2.82)\times g(2.83)<0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

من الجواب السابق نستنتج ان اشارة $g(x)$هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1) تبيان أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^{3}}{e^{x}-1};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$ معناه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=L$ حيث L عدد حقيقي ثابت

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{e^{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}x.\dfrac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}}=0$ لاحظ أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ ن.شهيرة

كتابة معادلة لـ(T)مماس(C_f)عندO

المماس له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ نلاحظ أن $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

ومنه : $y = 0(x-0) + f(0)$ وعليه: $y = 0$ حامل محور الفواصل.

2) أ)تبيّان أن $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$ ثم إيجاد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

*نضع: $y = -x$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim_{y\to-\infty} -(y^3e^y) = 0$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0$ وذلك باستعمال النتيجة السابقة و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x-1} = +\infty$.

ب)تبيّان أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x-1)^2} g(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2(e^x-1) - x^3.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{x^2[(3e^x - 3 - e^x]}{(e^x-1)^2} = \frac{x^2.g(x)}{(e^x-1)^2}.$$

جـ) التحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2(3-\alpha)$، ثم تعين حصرا له.

*لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1}$ ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha) = (3-\alpha)e^\alpha - 3 = 0$ ومعناه $e^\alpha = -\frac{3}{\alpha-3}$

ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{-\frac{3}{\alpha-3} - 1} = \frac{\alpha^3(\alpha-3)}{\alpha} = \alpha^2(3-\alpha)$

*تعيين الحصر:

لدينا: $\alpha \in]2,82\,;2,83[$ تكافئ $\alpha^2 \in]7,95\,;8,00[....(1)$

لدينا: $\alpha \in]2,82\,;2,83[$ تكافئ $3-\alpha \in]0,17\,;0,18[....(2)$

من (1) و(2) نجد: $f(\alpha) \in]1,35\,;1,44[$.

د)إنشاء جدول تغيرات f

من العبارة $f'(x) = \frac{x^2.g(x)}{(e^x-1)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ تتبع اشارة $g(x)$ والموضحة في جـ3.

وعليه جدول تغيرات يكون كمايلي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) حساب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C)

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x-1} + x^3 = \frac{x^3(e^x)}{e^x-1}$$

لدراسة الوضعية النسبية (C_f) و (C) ندرس اشارة الفرق: $f(x) - (-x^3) = \frac{x^3(e^x)}{e^x-1}$

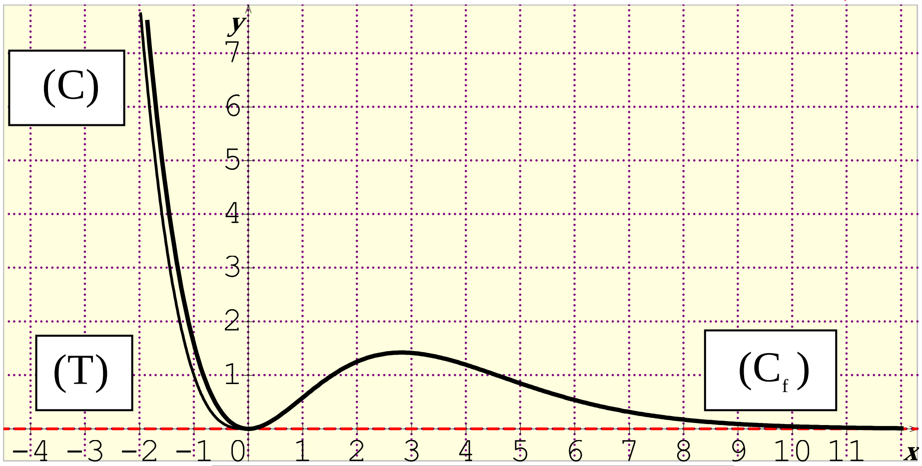
اشارة الفرق هي حسب اشارة $x(e^x-1)$ ونلاحظ ان $x(e^x-1) \geq 0$ وعليه يكون (C_f) فوق (C)

4) تبيّان أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x^3] = 0$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3(e^x)}{e^x-1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(e^x)=0$ نهاية شهيرة

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=0$ معناه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x^3)]=0$ ومعناه (C) منحنى الدالة $x\to-x^3$ منحنى مقارب للمنحنى لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

5) إنشاء في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C)



التمرين 44 :دورة جوان2008

I- 1) دراسة تغيرات الدالة f

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$

<u>النهايات</u>: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+\frac{4}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x+1}=4$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1+\frac{4}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$.

<u>اتجاه التغيروجدول التغيرات</u>

حساب المشتق ودراسة اشارته

$$f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ معناه $(e^x-1)^2=0$ أي $x=0$

نلاحظ $f'(x)\geq 0$ لأن $(e^x-1)^2\geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

2) تبيان ان (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω وكتابة معادلة المماس (C_f) عند ω.

* (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω معناه الدالة المشتقة f' تنعدم عند قيمة x_0 وتحافظ على اشارتها

من خلال جدول التغيرات للدالة f نلاحظ $f'(x)$ تنعدم عند 0 و $f'(x)\geq 0$

ومنه (C_f) يقبل نقط إنعطاف $\omega(0;1)$.

*كتابة معادلة المماس (C_f) عند ω.

المماس له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ومنه: $y=0(x-0)+f(0)$ وعليه: $y=1$.

* تبيان ان ω مركز تناظر لـ (C_f)

$\omega(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f) معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$; $f(-x)+f(x)=2$

لدينا: $f(-x)+f(x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1}=-2+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{4}{e^{x}+1}=-2+\frac{4(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=2$

3) حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$ واستنتاج ان (C_f) يقبل مقاربين

*$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}+1}=0$ ومعناه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته: $y=x-1$

*$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4e^{x}}{e^{x}+1}=0$ ومعناه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته: $y=x+3$

4) تبيان ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2,77;-2,76[$.

f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $f(-2.77)\times g(-2.76)<0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة x_0 تحقق: $f(x_0)=0$ معناه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0

*حساب $f(1)$ و $f(-1)$ ورسم (C_f) الرسم يكون آخر الحل

$f(1)=\frac{4}{e-1}$ و $f(-1)=-2+\frac{4e}{e+1}$

II 1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}$

لدينا: $f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x+3+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}-4=-x+3+\frac{4e^{x}-4e^{x}-4}{e^{x}+1}=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}=g(x)$

2) انشاء (C_g) في نفس المعلم السابق(دون دراسة g).

من العبارة $g(x)=f(-x)$ نستنتج أن (C_g) هو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب